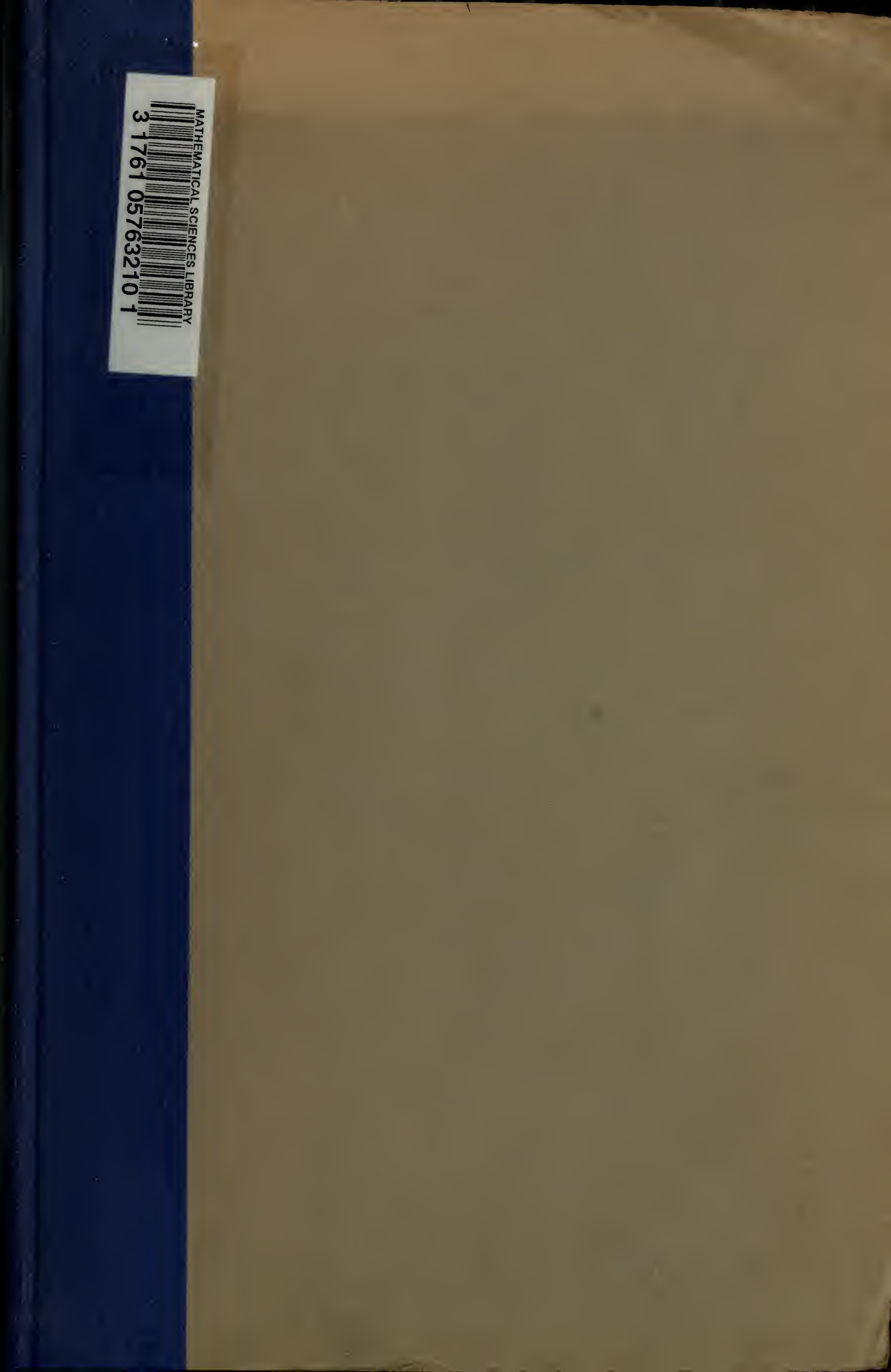
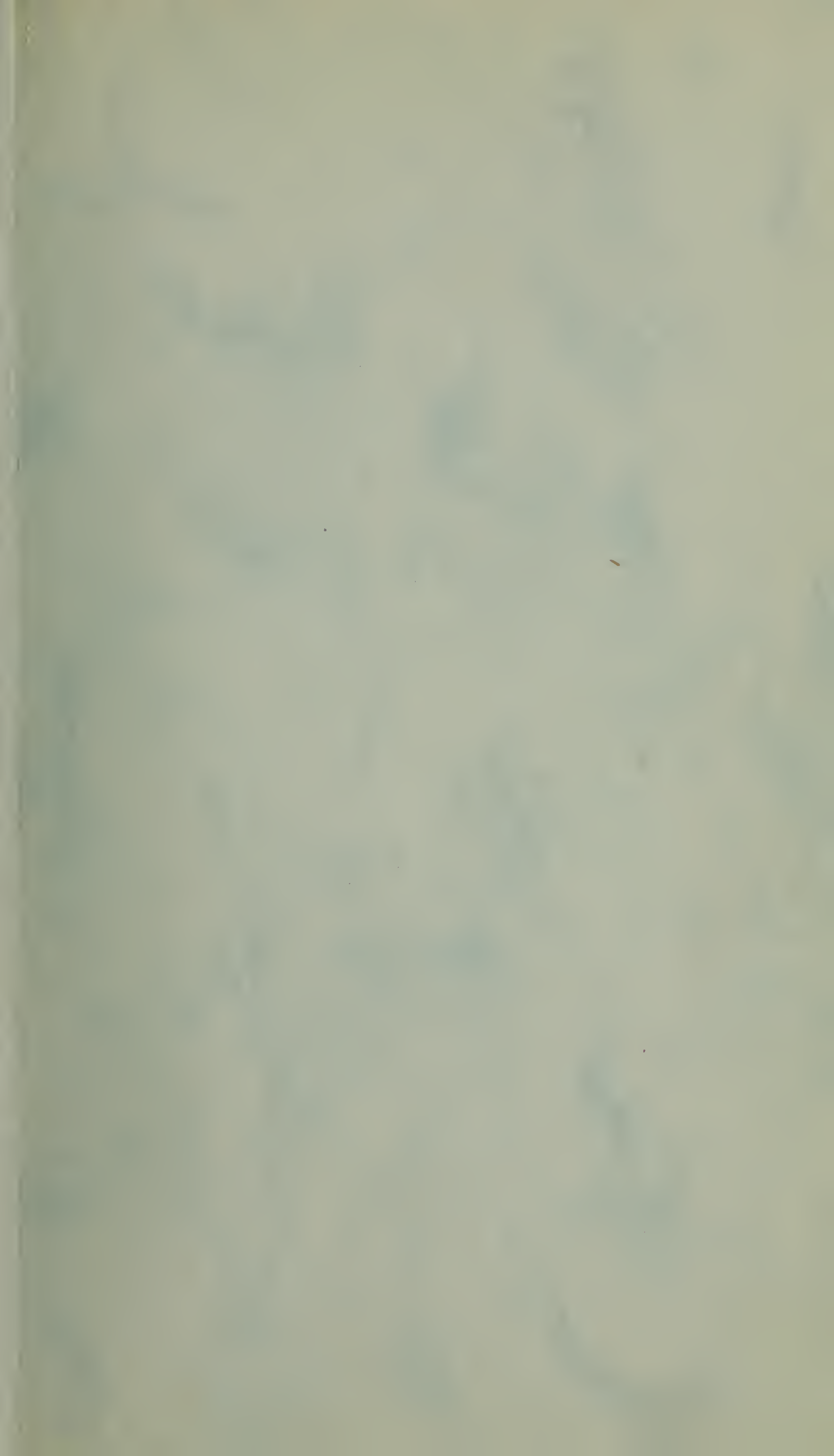
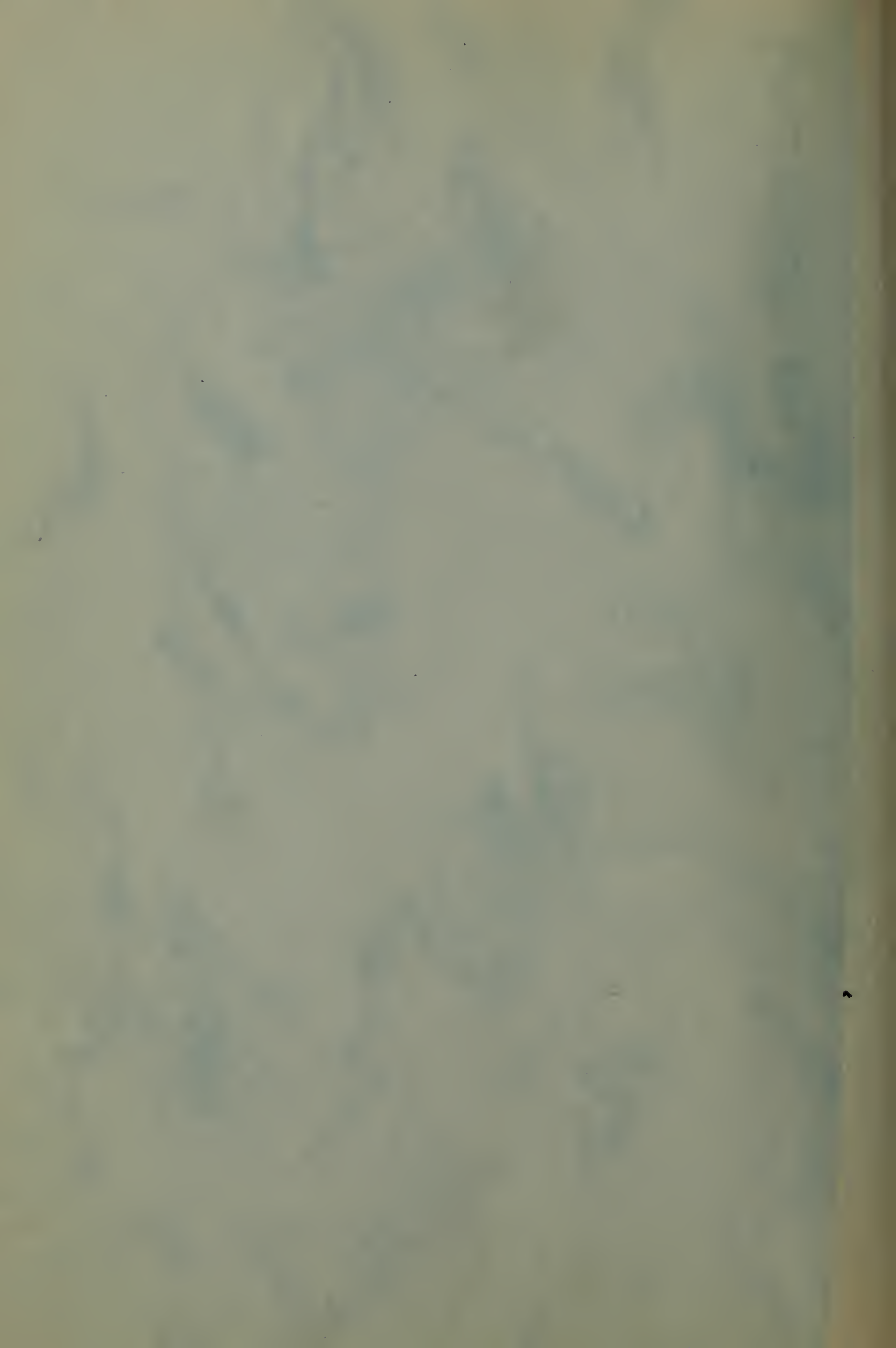

MATHEMATICAL SCIENCES LIBRARY
3 1761 05763210 1


UNIVERSITY OF TORONTO
VELUT ARBOR ÆVO





ABHANDLUNGEN ZUR GESCHICHTE DER MATHEMATISCHEN WISSENSCHAFTEN

MIT EINSCHLUSS IHRER ANWENDUNGEN.

BEGRÜNDET VON MORITZ CANTOR.

18

ACHTZEHNTES HEFT.

MIT 34 FIGUREN IM TEXT.

INHALT:



LEIPZIG,

DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.

1904.


LIBRARY
NOV 27 1966
UNIVERSITY OF TORONTO

MATHEMATISCHES ZU ARISTOTELES.

VON

J. L. HEIBERG.

MIT 30 FIGUREN IM TEXT.



Mathematisches zu Aristoteles.

I.

Von dem regen Leben, das in Athen im IV. Jahrhundert auf dem Gebiete der Mathematik herrschte, gibt das Mathematikerverzeichnis bei Proklos *in Eucl.* S. 66 ff., das bekanntlich auf Eudemos zurückgeht (Spengel, *Eudemi fragmenta* no. LXXXIV), ein klares Bild. Der sachkundige Verfasser hat dabei auch besonders auf die Fortschritte geachtet, die das Lehrgebäude der Elementargeometrie, die *στοιχεῖα*, in diesem Zeitraum gemacht hat. Nachdem Hippokrates von Chios das erste Lehrbuch herausgegeben hatte, erschien schon in der nächsten Generation ein neues von Leon, erweitert und sorgfältiger (*τῷ τε πλήθει καὶ τῇ χρείᾳ τῶν δεικνυμένων ἐπιμελέστερον*). Seine Zeit läßt sich dadurch bestimmen, daß Eudoxos S. 67, 2 *Λέοντος μὲν ὀλίγῳ νεώτερος* heißt; Leon ist also nur wenig jünger als Platon, und mit diesem Ansatze lassen die übrigen chronologischen Angaben des Eudemos sich einigermaßen vereinigen. Leon ist Schüler von Neokleides, der jünger ist als Leodamas (S. 66, 18 bis 19); dieser wird S. 66, 15 in einer Linie mit Archytas und Theaitetos genannt, aber als erster, und alle drei werden *nach* Platon aufgeführt mit der ganz unbestimmten Übergangsformel *ἐν δὲ τούτῳ τῷ χρόνῳ*. Wenn ein Schüler des etwas jüngeren Neokleides zwischen Platon und Eudoxos zeitlich in der Mitte steht, muß Leodamas etwas älter sein als Platon; daß er ihm nachgestellt wird, hat ohne Zweifel darin seinen Grund, daß er durch Platon auf die analytische Methode gebracht wurde (Proklos S. 211, Diogenes Laert. III 24). Weder er noch Neokleides und Leon gehören unter die direkten Schüler Platons, deren Reihe im Mathematikerverzeichnis S. 67, 2 Eudoxos eröffnet und auch er noch als ein von außen her hinzugetretener Gelehrter (*ἑταῖρος δὲ τῶν περὶ Πλάτωνος γενόμενος*). Das geometrische Lehrbuch der Akademie schrieb Theudios *ὁ Μάγνης*, der mit Amyklas *ὁ Ἡρακλεώτης*, Menaichmos, dem Schüler des Eudoxos, seinem Bruder Deinostratos und Athenaios aus Kyzikos zu denen gehörte, die *διῆγον μετ' ἀλλήλων ἐν Ἀκαδημίᾳ κοινὰς ποιούμενοι τὰς*

ζητήσεις (S. 67, 19). Von ihm heißt es S. 67, 12 ff.: *ἔν τε τοῖς μαθήμασιν ἔδοξεν εἶναι διαφέρων καὶ κατὰ τὴν ἄλλην φιλοσοφίαν· καὶ γὰρ τὰ στοιχεῖα καλῶς συνέταξεν καὶ πολλὰ τῶν μερικῶν καθολικώτερα ἐποίησεν.* Nach Theudios nennt Eudemos kein Lehrbuch mehr; denn von Hermotimos, der mit Philippos ὁ *Μενδαῖος* eine jüngere Generation der Platonschüler repräsentiert, etwa die des Aristoteles, und, wie Proklos S. 68, 4 ausdrücklich bezeugt, die Grenze der Eudemischen Geschichte der Mathematik war, heißt es nur S. 67, 22: *τῶν στοιχείων πολλὰ ἀνεῦρε.* Seine Entdeckungen auf dem Gebiete der elementaren Mathematik hat wohl also erst Euklid in das Lehrgebäude der *στοιχεῖα* eingefügt.

Theudios, dessen Lehrbuch ohne Zweifel, wie es auf diesem Gebiete der Literatur zu gehen pflegt, bald das Werk Leons als veraltet aus dem Gebrauch verdrängte, ist also der unmittelbare Vorgänger Euklids, und man wüßte gern Näheres über sein Buch. Direkt ist nichts überliefert, und die Elemente Euklids bieten nur spärliche Handhaben für Rückschlüsse auf die Vorarbeiten. Dagegen geben die mathematischen Stellen bei Aristoteles einige Aussicht auf sichere Aufschlüsse. Der Begriff der *στοιχεῖα* ist ihm vollkommen vertraut (Diels, *Elementum* S. 26 ff.; vgl. 163ᵇ 23: *ἐν γεωμετρίᾳ πρὸ ἔργου τὸ περὶ τὰ στοιχεῖα γεγυμνάσθαι*). Was er von der elementaren Mathematik als bekannt voraussetzt, muß doch einem seinen Zuhörern geläufigen Lehrbuche entstammen, und das kann nach den Zeitverhältnissen sowie nach den Lobsprüchen des Eudemos gerade auf dieses Werk nur das von Theudios sein. Es lohnt sich daher vielleicht, die mathematischen Stellen des Aristoteles daraufhin zu prüfen, eine Aufgabe, die sowohl Cantor (*Vorlesungen über Geschichte der Mathematik* I² S. 239) als Görland (*Aristoteles und die Mathematik,* Marburg 1899 S. 93) als undankbar ablehnen; die Hauptsachen hat allerdings schon Hankel in seinem geistreichen Buch *Zur Geschichte der Mathematik* (Leipzig 1874) S. 135 ff. klar und scharf herausgehoben. Blancanus, *Aristotelis loca mathematica ex universis ipsius operibus collecta et explicata* (Bononiae 1615), der das Material ziemlich vollständig, wenn auch für diese Anwendung unübersichtlich, gesammelt hat, verfolgt ganz andere Zwecke. Es wird also nicht überflüssig sein, die Stellen noch einmal zu durchmustern mit dem besonderen Ziel, sie über das System der Elementarmathematik, wie es zu Aristoteles' Zeit ausgebildet vorlag, zu befragen, um so in die Genesis der Elemente Euklids einen Einblick zu gewinnen.

Vor allen Dingen ist es klar, wie Hankel a. O. richtig erkannt hat, daß der strenge Aufbau des Systems auf Definitionen und Axiomen schon in den Lehrbüchern zu Aristoteles' Zeit vorlag. Nicht nur spricht er

1005ᵃ 20 von τῶν ἐν τοῖς μαθήμασι καλουμένων ἀξιωμάτων, sondern er führt auch eins an, 1061ᵇ 19 ff.: ὅτι γὰρ ἀπὸ τῶν ἴσων ἴσων ἀφαιρεθέντων ἴσα τὰ λειπόμενα, κοινὸν μέν ἐστιν ἐπὶ πάντων τῶν ποσῶν, ἡ μαθηματικὴ δ' ἀπολαβοῦσα περί τι μέρος τῆς οἰκείας ὕλης ποιεῖται τὴν θεωρίαν οἷον περὶ γραμμὰς ἢ γωνίας ἢ ἀριθμοὺς ἢ τῶν λοιπῶν τι ποσῶν = Euklid I κοιν. ἐνν. 3: ἐὰν ἀπὸ ἴσων ἴσα ἀφαιρεθῇ, τὰ καταλειπόμενά ἐστιν ἴσα. Ebenso 41ᵇ 21: ἐὰν μὴ λάβῃ ἀπὸ τῶν ἴσων ἴσων ἀφαιρουμένων ἴσα λείπεσθαι. Wie in der zuerst angeführten Stelle wird dieses Axiom ebenfalls unter die κοινά gerechnet 77ᵃ 30: τὰ κοινά, οἷον ὅτι ἅπαν φάναι ἢ ἀποφάναι ἢ ὅτι ἴσα ἀπὸ ἴσων ἢ τῶν τοιούτων ἄττα, und den speziell mathematischen Definitionen entgegengestellt 76ᵃ 40: ἴδια μὲν οἷον γραμμὴν εἶναι τοιανδὶ καὶ τὸ εὐθύ, κοινὰ δὲ οἷον τὸ ἴσα ἀπὸ ἴσων ἂν ἀφέλῃ, ὅτι ἴσα τὰ λοιπά· ἱκανὸν δ' ἕκαστον τούτων ὅσον ἐν τῷ γένει· ταὐτὸ γὰρ ποιήσει, κἂν μὴ κατὰ πάντων λάβῃ ἀλλ' ἐπὶ μεγεθῶν μόνον, τῷ δ' ἀριθμητικῷ ἐπ' ἀριθμῶν; die κοινά werden als allgemein verständlich nicht definiert, s. 76ᵇ 20: ὥσπερ οὐδὲ τὰ κοινά, οὐ λαμβάνει, τί σημαίνει τὸ ἴσα ἀπὸ ἴσων ἀφελεῖν, ὅτι γνώριμον. Hieraus hat sich die mit Unrecht als stoisch angefochtene Bezeichnung der Axiome in unseren Euklidhandschriften als κοιναὶ ἔννοιαι entwickelt; Proklos, der sie ἀξιώματα nennt, bemerkt S. 194, 8, daß nach dem genaueren Sprachgebrauch des Aristoteles und der Mathematiker ταὐτόν ἐστιν ἀξίωμα καὶ ἔννοια κοινή. Auch sagt Aristoteles 76ᵇ 14: τὰ κοινὰ λεγόμενα ἀξιώματα, ἐξ ὧν πρώτων ἀποδείκνυσι, und 996ᵇ 27: λέγω δὲ ἀποδεικτικὰς τὰς κοινὰς δόξας, ἐξ ὧν ἅπαντες δεικνύουσιν, 997ᵃ 20: τὰ καθ' αὑτὰ συμβεβηκότα ἐκ τῶν κοινῶν δοξῶν in demselben Sinne. Von den Euklidischen Postulaten (αἰτήματα) dagegen findet sich keine Spur bei Aristoteles, bei dem αἴτημα eine andere Bedeutung hat (ungefähr gleich πρότασις oder ὑπόθεσις, s. 76ᵇ 32: ἔστι γὰρ αἴτημα τὸ ὑπεναντίον τοῦ μανθάνοντος τῇ δόξῃ ἢ ὃ ἄν τις ἀποδεικτὸν ὂν λαμβάνῃ καὶ χρῆται μὴ δείξας). Es ist daher nicht unwahrscheinlich, daß die Aufstellung der αἰτήματα oder wenigstens die Trennung der αἰτήματα und ἀξιώματα von Euklid selbst herrührt. Sie steht jedenfalls mit der in der Akademie geführten Verhandlung über Theorem und Problem in Verbindung, von der Proklos S. 77 ff. interessante Nachrichten gibt (die Gegner waren Speusippos und Menaichmos); S. 182, 1 ff. parallelisiert Proklos das Verhältnis zwischen αἴτημα und ἀξίωμα mit dem zwischen Problem und Theorem.

An den soeben angeführten Stellen 76ᵃ 31 ff. und 996ᵇ 26 ff. setzt Aristoteles auseinander, daß alle ἐπιστῆμαι ἀποδεικτικαί von gewissen festen Grundlagen ausgehen müssen (997ᵃ 10 πᾶσαι γὰρ αἱ ἀποδεικτικαὶ χρῶνται τοῖς ἀξιώμασι, 997ᵃ 7 περὶ πάντων γὰρ ἀδύνατον ἀπόδειξιν εἶναι), und sowohl hier als sonst (s. besonders 41ᵇ 13: daß, um einen συλλογισμός

zustande zu bringen, allgemeine Sätze notwendig sind, *μᾶλλον γίνεται φανερὸν ἐν τοῖς διαγράμμασιν*, d. h. in der Mathematik, wie 175ᵃ 27, 1051ᵃ 22; *διάγραμμα* ist so viel als Theorem, 14ᵃ 39, 998ᵃ 25) benutzt er die Mathematik in solcher Weise als typisches Beispiel, daß sein Begriff einer *ἐπιστήμη ἀποδεικτική* geradezu als aus ihr abgeleitet erscheint; vgl. 71ᵃ 1: *πᾶσα διδασκαλία καὶ πᾶσα μάθησις διανοητικὴ ἐκ προυπαρχούσης γίνεται γνώσεως· φανερὸν δὲ τοῦτο θεωροῦσιν ἐπὶ πασῶν· αἵ τε γὰρ μαθηματικαὶ τῶν ἐπιστημῶν διὰ τούτου τοῦ τρόπου παραγίνονται καὶ τῶν ἄλλων ἑκάστη τεχνῶν*; 153ᵃ 7: *πρῶτον μὲν εἰδέναι δεῖ, ὅτι οὐδεὶς ἢ ὀλίγοι τῶν διαλεγομένων ὅρον συλλογίζονται, ἀλλὰ πάντες ἀρχὴν τὸ τοιοῦτον λαμβάνουσιν, οἷον οἵ τε περὶ γεωμετρίαν καὶ ἀριθμοὺς καὶ τὰς ἄλλας τὰς τοιαύτας μαθήσεις*; 1025ᵇ 4: *καὶ τῶν μαθηματικῶν εἰσιν ἀρχαὶ καὶ στοιχεῖα καὶ αἴτια, καὶ ὅλως δὲ πᾶσα ἐπιστήμη διανοητικὴ ἢ μετέχουσά τι διανοίας περὶ αἰτίας καὶ ἀρχάς ἐστιν*. Auch das indirekte Beweisverfahren (*ἡ εἰς τὸ ἀδύνατον ἀπόδειξις* 77ᵃ 22) hat wohl wesentlich die Mathematik aufgebracht. Ohne Zweifel ist die Anwendung von Buchstaben zur Bezeichnung der Glieder des Syllogismus ebenfalls aus der Mathematik entlehnt, wie überhaupt die Beigabe von Figuren, also die Anfänge der Illustration, von dieser Seite herstammt; vgl. 279ᵇ 33: *ὁμοίως γάρ φασι τοῖς τὰ διαγράμματα γράφουσι καὶ σφᾶς εἰρηκέναι περὶ τῆς γενέσεως οὐχ ὡς γενομένου ποτέ, ἀλλὰ διδασκαλίας χάριν ὡς μᾶλλον γνωριζόντων ὥσπερ τὸ διάγραμμα γιγνόμενον θεασαμένους*; 450ᵃ 1: *συμβαίνει γὰρ τὸ αὐτὸ πάθος ἐν τῷ νοεῖν, ὅπερ καὶ ἐν τῷ διαγράφειν· ἐκεῖ τε γὰρ οὐθὲν προσχρώμενοι τῷ τὸ ποσὸν ὡρισμένον εἶναι τοῦ τριγώνου ὅμως γράφομεν ὡρισμένον κατὰ τὸ ποσόν*; 375ᵇ 18: *ἐκ τοῦ διαγράμματος ἔσται θεωροῦσι δῆλον*; 76ᵃ 39: *οὐδ' ὁ γεωμέτρης ψευδῆ ὑποτίθεται, ὥσπερ τινὲς ἔφασαν λέγοντες, ὡς οὐ δεῖ τῷ ψευδεῖ χρῆσθαι, τὸν δὲ γεωμέτρην ψεύδεσθαι λέγοντα ποδιαίαν τὴν οὐ ποδιαίαν ἢ εὐθεῖαν τὴν γεγραμμένην οὐκ εὐθεῖαν οὖσαν. ὁ δὲ γεωμέτρης οὐδὲν συμπεραίνεται τῷ τήνδε εἶναι γραμμήν, ἣν αὐτὸς ἔφθεγκται, ἀλλὰ τὰ διὰ τούτων δηλούμενα*; vgl. 1089ᵃ 22.

Wenn das System der Elementarmathematik zur Schärfe der Aristotelischen Darstellung der Logik beigetragen hat, so ist damit nur zurückgezahlt, was die Mathematik der Philosophie schuldig war. Denn daß die Grundlage des mathematischen Lehrgebäudes auf Platon zurückgeht, ist wenigstens für die Definitionen direkt bezeugt (s. Hankel a. O. S. 135) und wird dann auch für die Axiome gelten.

Zu den unbeweisbaren Grundlagen (*ἀρχαί*) der *ἀποδεικτικαὶ ἐπιστῆμαι* rechnet nämlich Aristoteles außer den Axiomen auch die Definitionen (*ὅροι*), und wiederum gibt ihm hier wie bei jenen die Mathematik den Grundtypus; s. 76ᵇ 3: *ἔστι δ' ἴδια μὲν καὶ ἃ λαμβάνεται εἶναι, περὶ ἃ ἡ ἐπιστήμη θεωρεῖ τὰ ὑπάρχοντα καθ' αὐτά, οἷον μονάδας ἡ ἀριθμητική, ἡ δὲ*

γεωμετρία σημεῖα καὶ γραμμάς· ταῦτα γὰρ λαμβάνουσι τὸ εἶναι καὶ τοδὶ εἶναι. τὰ δὲ τούτων πάθη καθ' αὑτά, τί μὲν σημαίνει ἕκαστον, λαμβάνουσιν, οἷον ἡ μὲν ἀριθμητική, τί περιττὸν ἢ ἄρτιον ἢ τετράγωνον ἢ κύβος, ἡ δὲ γεωμετρία, τί τὸ ἄλογον ἢ τὸ κεκλάσθαι ἢ νεύειν; 76ª 31: *λέγω δ' ἀρχὰς ἐν ἑκάστῳ γένει ταύτας, ἃς ὅτι ἔστι μὴ ἐνδέχεται δεῖξαι. τί μὲν οὖν σημαίνει καὶ τὰ πρῶτα καὶ τὰ ἐκ τούτων, λαμβάνεται, ὅτι δ' ἔστι, τὰς μὲν ἀρχὰς ἀνάγκη λαμβάνειν, τὰ δ' ἄλλα δεικνύναι, οἷον τί μονὰς ἢ τί τὸ εὐθὺ καὶ τρίγωνον, εἶναι δὲ τὴν μονάδα λαβεῖν καὶ μέγεθος, τὰ δ' ἕτερα δεικνύναι;* 90ᵇ 31: *αἱ δ' ἀποδείξεις φαίνονται πᾶσαι ὑποτιθέμεναι καὶ λαμβάνουσαι τὸ τί ἐστιν, οἷον αἱ μαθηματικαί, τί μονὰς καὶ τί τὸ περιττόν, καὶ αἱ ἄλλαι ὁμοίως;* 92ᵇ 12: *εἶτα καὶ δι' ἀποδείξεώς φαμεν ἀναγκαῖον εἶναι δείκνυσθαι ἅπαν ὅτι ἔστιν, εἰ μὴ οὐσία εἴη· τὸ δ' εἶναι οὐκ οὐσία οὐδενί· οὐ γὰρ γένος τὸ ὄν. ἀπόδειξις ἄρ' ἔσται, ὅτι ἔστιν. ὅπερ καὶ νῦν ποιοῦσιν αἱ ἐπιστῆμαι. τί μὲν γὰρ σημαίνει τὸ τρίγωνον, ἔλαβεν ὁ γεωμέτρης, ὅτι δ' ἔστιν, δείκνυσιν;* 93ᵇ 29: *ὁρισμὸς δ' ἐπειδὴ λέγεται εἶναι λόγος τοῦ τί ἐστι, φανερόν, ὅτι ὁ μέν τις ἔσται λόγος τοῦ τί σημαίνει τὸ ὄνομα ἢ λόγος ἕτερος ὀνοματώδης, οἷον τὸ τί σημαίνει τί ἐστιν ᾗ τρίγωνον;* 96ᵇ 15: *χρὴ δέ, ὅταν ὅλον τι πραγματεύηταί τις, διελεῖν τὸ γένος εἰς τὰ ἄτομα τῷ εἴδει τὰ πρῶτα, οἷον ἀριθμὸν εἰς τριάδα καὶ δυάδα, εἶθ' οὕτως ἐκείνων ὁρισμοὺς πειρᾶσθαι λαμβάνειν, οἷον εὐθείας γραμμῆς καὶ κύκλου καὶ ὀρθῆς γωνίας;* 141ᵇ 5: *ἁπλῶς μὲν οὖν γνωριμώτερον τὸ πρότερον τοῦ ὑστέρου, οἷον στιγμὴ γραμμῆς καὶ γραμμὴ ἐπιπέδου καὶ ἐπίπεδον στερεοῦ, καθάπερ καὶ μονὰς ἀριθμοῦ· πρότερον γὰρ καὶ ἀρχὴ παντὸς ἀριθμοῦ;* 198ª 17: *οἷον ἐν τοῖς μαθήμασιν· εἰς ὁρισμὸν γὰρ τοῦ εὐθέος ἢ συμμέτρου ἢ ἄλλου τινὸς ἀνάγεται ἔσχατον.*

So wird durchgehend auch der Begriff der Definition durch mathematische Beispiele erläutert. Von den einzelnen Definitionen nun, die Aristoteles als seinen Zuhörern geläufig voraussetzt, sind folgende als Platonisch bezeugt:

73ª 38: *οἷον τὸ εὐθὺ ὑπάρχει γραμμῇ καὶ τὸ περιφερές* = Platon, *Phileb.* 51 c: *εὐθύ τι λέγω, φησὶν ὁ λόγος, καὶ περιφερές.*

148ᵇ 26: *οἷον, εἰ ὡρίσατο γραμμὴν πεπερασμένην εὐθεῖαν πέρας ἐπιπέδου ἔχοντος πέρατα, οὗ τὸ μέσον ἐπιπροσθεῖ τοῖς πέρασιν, εἰ τῆς πεπερασμένης γραμμῆς ὁ λόγος ἐστὶ πέρας ἐπιπέδου ἔχοντος πέρατα, τοῦ εὐθέος δεῖ εἶναι τὸ λοιπόν· οὗ τὸ μέσον ἐπιπροσθεῖ τοῖς πέρασιν* = Platon, *Parmenid.* 137 e: *καὶ μὴν εὐθύ γε (ἐστι τοῦτο), οὗ ἂν τὸ μέσον ἀμφοῖν τοῖν ἐσχάτοιν ἐπίπροσθεν ᾖ.*

141ᵇ 19: *εἰσὶ δὲ τῶν τοιούτων ὁρισμῶν ὅ τε τῆς στιγμῆς καὶ ὁ τῆς γραμμῆς καὶ ὁ τοῦ ἐπιπέδου· πάντες γὰρ διὰ τῶν ὑστέρων τὰ πρότερα δηλοῦσιν· τὸ μὲν γὰρ γραμμῆς, τὸ δ' ἐπιπέδου, τὸ δὲ στερεοῦ φασι πέρας εἶναι* = Platon, *Menon* 76 a: *ἐπίπεδον καλεῖς τι καὶ ἕτερον αὖ στερεόν, οἷον*

ταῦτα τὰ ἐν γεωμετρίαις; . . . κατὰ γὰρ παντὸς σχήματος τοῦτο λέγω, εἰς ὃ τὸ στερεὸν περαίνει, τοῦτ' εἶναι σχῆμα· ὅπερ ἂν συλλαβὼν εἴποιμι στερεοῦ πέρας σχῆμα εἶναι, = Euklid, *Elem.* I def. 3: *γραμμῆς δὲ πέρατα σημεῖα,* 6: *ἐπιφανείας δὲ πέρατα γραμμαί,* XI def. 2: *στερεοῦ δὲ πέρας ἐπιφάνεια.*

Für Punkt sagt Aristoteles gewöhnlich *στιγμή*, seltener *σημεῖον* (76[b] 5, 141[b] 12, 373[a] 4 usw.; beides 317[a] 11: *οὐ γάρ ἐστιν ἐχόμενον σημεῖον σημείου ἢ στιγμὴ στιγμῆς*); die Mathematiker seit Euklid haben nur dieses. Nach 992[a] 19 nannte Platon *στιγμή* eine geometrische Fiktion (*δόγμα γεωμετρικόν*) und sagte lieber *ἀρχὴ γραμμῆς*. Es liegt daher nahe, zu vermuten, daß die Bezeichnung *σημεῖον*, wobei man zunächst an eine konventionelle Marke (*nota*) denkt, durch Platons Einfluß das Wort *στιγμή* verdrängt hat, das gleichsam mehr Realität für den Punkt beansprucht.

Proklos *in Eucl.* S. 116, 17 ff. bemerkt, daß Platon und Aristoteles *ἐπίπεδον* und *ἐπιφάνεια* nicht unterscheiden. Platon hat nur *ἐπίπεδον*, aber allerdings bald in der Bedeutung Fläche (*Leges* 817 e, *Menon* 76 a, *Phileb.* 51 c), bald für Plan (*Theaitet.* 173 e, *Respubl.* 528 a—d, auf welche letztere Stelle Proklos S. 116, 21 ff. sich irrtümlich für die Bedeutung *ἐπιφάνεια* zu berufen scheint). Aristoteles kennt schon *ἐπιφάνεια* im mathematischen Sinne (209[a] 8, 1020[a] 14, 1060[b] 15), sagt aber auch noch *ἐπίπεδον* für Fläche (141[b] 7, 22; 268[a] 8, 1016[b] 27), und zwar beides durcheinander 5[a] 2: *ἔστι γὰρ λαβεῖν κοινὸν ὅρον, πρὸς ὃν τὰ μόρια αὐτῆς συνάπτει, στιγμὴν καὶ τῆς ἐπιφανείας γραμμήν· τὰ γὰρ τοῦ ἐπιπέδου μόρια πρός τινα κοινὸν ὅρον συνάπτει. ὡσαύτως δὲ καὶ ἐπὶ τοῦ σώματος ἔχοις ἂν λαβεῖν κοινὸν ὅρον, γραμμὴν ἢ ἐπιφάνειαν, πρὸς ἃ τὰ τοῦ σώματος μόρια συνάπτει.* Noch bei Euklid (XI def. 11) kommt einmal *ἐπιφάνεια* statt *ἐπίπεδον* vor in einer Definition, die wahrscheinlich aus einem älteren Lehrbuch stammt (s. *Euclidis opp.* V S. LXXXIX), während er sonst genau unterscheidet I def. 5: *ἐπιφάνεια δέ ἐστιν, ὃ μῆκος καὶ πλάτος μόνον ἔχει,* def. 7: *ἐπίπεδος ἐπιφάνειά ἐστιν, ἥτις ἐξ ἴσου ταῖς ἐφ' ἑαυτῆς εὐθείαις κεῖται.* Letztere Definition ist offenbar der Definition der Geraden (I def. 4: *εὐθεῖα γραμμή ἐστιν, ἥτις ἐξ ἴσου τοῖς ἐφ' ἑαυτῆς σημείοις κεῖται*) nachgebildet, und da diese von der Platonischen (s. oben) abweicht, die noch Aristoteles als die gangbare voraussetzt, stammen sie wahrscheinlich alle beide von Euklid selbst. Dieser Tatbestand spricht nicht für die Richtigkeit der Notiz bei Diogenes Laertios III 24: (*Πλάτων*) *πρῶτος ἐν φιλοσοφίᾳ . . . ὠνόμασε . . . τῶν περάτων τὴν ἐπίπεδον ἐπιφάνειαν.*

Von den bei Aristoteles erwähnten Definitionen stimmen mit Euklid die folgenden sachlich oder zugleich sprachlich:

231[a] 25: *ἡ στιγμὴ δὲ ἀδιαίρετον,* vgl. 241[a] 7: *οὔτε στιγμὴν οὔτ' ἄλλο ἀδιαίρετον οὐθέν* = Euklid I def. 1: *σημεῖόν ἐστιν, οὗ μέρος οὐθέν.*

143[b] 11: *καθάπερ οἱ τὴν γραμμὴν ὁριζόμενοι μῆκος ἀπλατὲς εἶναι* = Euklid I def. 2: *γραμμὴ δὲ μῆκος ἀπλατές.*

1035[b] 6: *ὁ δὲ τῆς ὀρθῆς λόγος οὐ διαιρεῖται εἰς ὀξείας λόγον, ἀλλὰ τῆς ὀξείας εἰς ὀρθήν· χρῆται γὰρ ὁ ὁριζόμενος τὴν ὀξεῖαν τῇ ὀρθῇ· ἐλάττων γὰρ ὀρθῆς ἡ ὀξεῖα* (vgl. 1034[b] 28, 1084[b] 8), 107[a] 16: *γωνία δὲ ὀξεῖα ἡ ἐλάσσων ὀρθῆς* = Euklid I def. 12: *ὀξεῖα δὲ ἡ ἐλάσσων ὀρθῆς.*

286[b] 13: *ἅπαν δὴ σχῆμα ἐπίπεδον ἢ εὐθύγραμμόν ἐστιν ἢ περιφερόγραμμον, καὶ τὸ μὲν εὐθύγραμμον ὑπὸ πλειόνων περιέχεται γραμμῶν, τὸ δὲ περιφερόγραμμον ὑπὸ μιᾶς* (vgl. 414[b] 20: *εἷς ἂν εἴη λόγος ψυχῆς τε καὶ σχήματος· οὔτε γὰρ ἐκεῖ σχῆμα παρὰ τὸ τρίγωνόν ἐστι καὶ τὰ ἐφεξῆς, οὔτ' ἐνταῦθα ψυχὴ παρὰ τὰς εἰρημένας. γένοιτο δ' ἂν καὶ ἐπὶ τῶν σχημάτων λόγος κοινός, ὃς ἐφαρμόσει μὲν πᾶσιν, ἴδιος δ' οὐδενὸς ἔσται σχήματος;* 90[b] 34: *ἐν δὲ τῷ ὁρισμῷ οὐδὲν ἕτερον ἑτέρου κατηγορεῖται, οἷον οὔτε τὸ ζῷον κατὰ τοῦ δίποδος οὔτε τοῦτο κατὰ τοῦ ζῴου, οὐδὲ δὴ κατὰ τοῦ ἐπιπέδου τὸ σχῆμα· οὐ γάρ ἐστι τὸ ἐπίπεδον σχῆμα οὐδὲ τὸ σχῆμα ἐπίπεδον*) = Euklid I def. 15: *σχῆμά ἐστι τὸ ὑπό τινος ἤ τινων ὅρων περιεχόμενον,* darauf def. 15: *κύκλος ἐστὶ σχῆμα ἐπίπεδον ὑπὸ μιᾶς γραμμῆς περιεχόμενον* usw., def. 18: *ἡμικύκλιον δέ ἐστι τὸ περιεχόμενον σχῆμα* usw., def. 19: *σχήματα εὐθύγραμμά ἐστι τὰ ὑπὸ εὐθειῶν περιεχόμενα.* Zu bemerken ist, daß Aristoteles 188[a] 25: *σχήματος (γένη) γωνία εὐθὺ περιφερές* das Wort in etwas weiterer Bedeutung nimmt. Durch Einführung des Begriffs *ὅρος* (I def. 13: *ὅρος ἐστίν, ὅ τινός ἐστι πέρας*) hat Euklid gerade *γωνία* ausgeschlossen; wahrscheinlich gehört also diese Definition (13) und die entsprechende Änderung von def. 14 ihm selbst.

1023[b] 12: *μέρος λέγεται ἕνα μὲν τρόπον, εἰς ὃ διαιρεθείη ἂν τὸ ποσὸν ὁπωσοῦν· ἀεὶ γὰρ τὸ ἀφαιρούμενον τοῦ ποσοῦ, ᾗ ποσόν, μέρος λέγεται ἐκείνου. οἷον τῶν τριῶν τὰ δύο μέρος λέγεταί πως. ἄλλον δὲ τρόπον τὰ καταμετροῦντα τῶν τοιούτων μόνον· διὸ τὰ δύο τῶν τριῶν ἔστι μὲν ὡς λέγεται μέρος, ἔστι δ' ὡς οὔ* (vgl. 218[a] 6: *μετρεῖ τε γὰρ τὸ μέρος*) = Euklid V def. 1: *μέρος ἐστὶ μέγεθος μεγέθους τὸ ἔλασσον τοῦ μείζονος, ὅταν καταμετρῇ τὸ μεῖζον,* VII def. 3: *μέρος ἐστὶν ἀριθμὸς ἀριθμοῦ ὁ ἐλάσσων τοῦ μείζονος, ὅταν καταμετρῇ τὸν μείζονα* (vgl. VII def. 4: *μέρη δέ, ὅταν μὴ καταμετρῇ*).

99[a] 11: *τοῦ δ' ὅμοιον εἶναι χρῶμα χρώματι καὶ σχῆμα σχήματι ἄλλο ἄλλῳ· ὁμώνυμον γὰρ τὸ ὅμοιον ἐπὶ τούτων. ἔνθα μὲν γὰρ ἴσως τὸ ἀνάλογον ἔχειν τὰς πλευρὰς καὶ ἴσας τὰς γωνίας* = Euklid VI def. 1: *ὅμοια σχήματα εὐθύγραμμά ἐστιν, ὅσα τάς τε γωνίας ἴσας ἔχει κατὰ μίαν καὶ τὰς περὶ τὰς ἴσας γωνίας πλευρὰς ἀνάλογον.* Aus *ἴσως* bei Aristoteles 99[a] 13 scheint zu folgen, daß die Definition zu seiner Zeit in den Lehrbüchern noch nicht feststand. Vgl. 1054[b] 3: *ὅμοια δέ, ἐὰν μὴ ταὐτὰ ἁπλῶς ὄντα*

μηδὲ κατὰ τὴν οὐσίαν ἀδιάφορα τὴν συγκειμένην κατὰ τὸ εἶδος ταὐτὰ ᾖ, οἷον τὸ μεῖζον τετράγωνον τῷ μικρῷ ὅμοιον.

1039ª 12: εἴπερ ἐστὶν ὁ ἀριθμὸς σύνθεσις μονάδων, ὥσπερ λέγεται ὑπό τινων, 1057ª 2: ἔστι γὰρ ἀριθμὸς πλῆθος ἑνὶ μετρητόν = Euklid VII def. 2: ἀριθμὸς δὲ τὸ ἐκ μονάδων συγκείμενον πλῆθος.

142ᵇ 8: περιττὸν τὸ μονάδι μεῖζον ἀρτίου = Euklid VII def. 7: περισσὸς δὲ ὁ μὴ διαιρούμενος δίχα ἢ μονάδι διαφέρων ἀρτίου ἀριθμοῦ. Also hat Euklid hier wie XI def. 11 (s. oben) die ältere Definition beibehalten neben der wahrscheinlich von ihm selbst gebildeten, die der Definition des ἄρτιος ἀριθμός entspricht (VII def. 6: ἄρτιος ἀριθμός ἐστιν ὁ δίχα διαιρούμενος).

209ª 5: τρία, μῆκος καὶ πλάτος καὶ βάθος, οἷς ὁρίζεται σῶμα πᾶν, 142ᵇ 23: ἐν ἅπασι δὲ τὸ τοιοῦτον ἁμάρτημά ἐστιν, ἐν οἷς οὐ πρόκειται τοῦ λόγου τὸ τί ἐστιν, οἷον ὁ τοῦ σώματος ὁρισμὸς τὸ ἔχον τρεῖς διαστάσεις ... οὐ γὰρ εἴρηται, τί ὂν τρεῖς ἔχει διαστάσεις. Trotz diesem Tadel des Aristoteles hat Euklid diese Definition beibehalten, XI def. 1: στερεόν ἐστι τὸ μῆκος καὶ πλάτος καὶ βάθος ἔχον, wahrscheinlich wegen der Analogie mit den Definitionen von Linie und Fläche (I def. 2 und 5). Die Drei-Dimensionalität bezeichnet Aristoteles auch sonst als Definitionseigenschaft des σῶμα im Gegensatz zu Linie und Fläche, s. 268ª 7: τὸ μὲν ἐφ' ἓν γραμμή, τὸ δ' ἐπὶ δύο ἐπίπεδον, τὸ δ' ἐπὶ τρία σῶμα; 1016ᵇ 25: τὸ δὲ πάντῃ (sc. ἀδιαίρετον) καὶ θέσιν ἔχον στιγμή, τὸ δὲ μοναχῇ (sc. διαιρετόν) γραμμή, τὸ δὲ διχῇ ἐπίπεδον, τὸ δὲ πάντῃ καὶ τριχῇ διαιρετὸν κατὰ τὸ ποσὸν σῶμα; 1020ª 11: μεγέθους δὲ τὸ μὲν ἐφ' ἓν συνεχὲς μῆκος, τὸ δ' ἐπὶ δύο πλάτος, τὸ δ' ἐπὶ τρία βάθος. τούτων δὲ πλῆθος μὲν τὸ πεπερασμένον ἀριθμός, μῆκος δὲ γραμμή, πλάτος δὲ ἐπιφάνεια, βάθος δὲ σῶμα. Neben σῶμα benutzt Aristoteles auch das bei Euklid allein gebräuchliche στερεόν (so στερεὰ σχήματα 286ᵇ 12: περὶ τῶν σχημάτων, τὸ ποῖόν ἐστι πρῶτον, καὶ ἐν ἐπιπέδοις καὶ ἐν στερεοῖς; vgl. 306ᵇ 7), besonders wo es sich von mathematischen Körpern handelt; der Unterschied ist deutlich 193ᵇ 24: καὶ γὰρ ἐπίπεδα καὶ στερεὰ ἔχει τὰ φυσικὰ σώματα καὶ μήκη καὶ στιγμάς, περὶ ὧν σκοπεῖ ὁ μαθηματικός; 304ª 13: ὅτι τὰ μὲν σώματα πάντα σύγκειται ἐκ τοῦ λεπτομερεστάτου, τὰ δὲ σχήματα τὰ στερεὰ ἐκ τῶν πυραμίδων. Eine andere Definition des σῶμα wird angedeutet 204ᵇ 5: εἰ γάρ ἐστι σώματος λόγος τὸ ἐπιπέδῳ ὡρισμένον; 1066ᵇ 23: εἰ γὰρ σώματος λόγος τὸ ἐπιπέδοις ὡρισμένον. Sie hängt offenbar zusammen mit den 141ᵇ 19 ff. (s. oben) getadelten Definitionen von Punkt, Linie und Fläche, die Euklid (I def. 3 und 6) nicht als eigentliche Definitionen aufführt; dementsprechend hat er auch für das στερεόν diese ältere Definition der eigentlichen untergeordnet XI def. 2: στερεοῦ δὲ πέρας ἐπιφάνεια, und dieses Kompromiß wird ihm selbst gehören. Vgl.

noch 1090[b] 5: εἰσὶ δέ τινες, οἳ ἐκ τοῦ πέρατα εἶναι καὶ ἔσχατα τὴν στιγμὴν μὲν γραμμῆς, ταύτην δ' ἐπιπέδου, τοῦτο δὲ τοῦ στερεοῦ usw., und für diese Reihe von Definitionen überhaupt 141[b] 5: ἁπλῶς μὲν οὖν γνωριμώτερον τὸ πρότερον τοῦ ὑστέρου, οἷον στιγμὴ γραμμῆς καὶ γραμμὴ ἐπιπέδου καὶ ἐπίπεδον στερεοῦ, καθάπερ καὶ μονὰς ἀριθμοῦ ... ἡμῖν δ' ἀνάπαλιν ἐνίοτε συμβαίνει· μάλιστα γὰρ τὸ στερεὸν ὑπὸ τὴν αἴσθησιν πίπτει, τὸ δ' ἐπίπεδον μᾶλλον τῆς γραμμῆς, γραμμὴ δὲ σημείου μᾶλλον.

Von den bei Euklid definierten mathematischen Begriffen werden, von den landläufigen abgesehen (wie τμῆμα κύκλου 1034[b] 25, 1035[a] 9), außerdem die folgenden von Aristoteles als bekannt vorausgesetzt:

τρίγωνον ἰσοσκελές, ἰσόπλευρον, σκαληνόν Euklid I def. 20 — 224[a] 4: οὐδὲ τρίγωνα τὰ αὐτὰ τὸ ἰσόπλευρον καὶ τὸ σκαληνές (vgl. 74[a] 27, 84[b] 6); 1016[a] 31: τὸ ἰσοσκελὲς καὶ τὸ ἰσόπλευρον ταὐτὸ καὶ ἓν σχῆμα.

τετράγωνον, ἑτερόμηκες Euklid I def. 22 — 11[a] 10: οὐδὲν γὰρ μᾶλλον τὸ τετράγωνον τοῦ ἑτερομήκους κύκλος ἐστίν. ἑτερόμηκες kommt bei Euklid nur in der Definition vor; durch Aristoteles wird die Annahme Tannerys (s. *Euclidis opp.* V S. LXXXIX) bestätigt, daß diese Definition sowie mehrere andere aus älteren Lehrbüchern herübergenommen sind als στοιχεῖα des mathematischen Sprachgebrauchs. ἑτερόμηκες ist wie γνώμων (und καμπύλος) pythagoreische Erbschaft (986[a] 26).

γνώμων Euklid II def. 2 — 15[a] 30: τὸ τετράγωνον γνώμονος περιτεθέντος ηὔξηται μέν, ἀλλοιότερον δὲ οὐδὲν γεγένηται (von Zahlen als pythagoreisch angeführt 203[a] 13 ff.).

ἐναλλάξ Euklid V def. 12—99[a] 8: διὰ τί καὶ ἐναλλὰξ ἀνάλογον (vgl. 74[a] 18). Die von Eudoxos aufgestellte allgemeine Proportionslehre (Euklid V) ist natürlich dem Aristoteles bekannt, s. 85[a] 36: ἔστι δ' ἡ μὲν καθόλου (sc. ἀπόδειξις) τοιαύτη· προιόντες γὰρ δεικνύουσιν, ὥσπερ περὶ τοῦ ἀνὰ λόγον, οἷον ὅτι, ὃ ἂν ᾖ τι τοιοῦτον, ἔσται ἀνὰ λόγον, ὃ οὔτε γραμμὴ οὔτ' ἀριθμὸς οὔτε στερεὸν οὔτ' ἐπίπεδον, ἀλλὰ παρὰ ταῦτά τι; und zwar als eine Neuerung, s. 74[a] 17: καὶ τὸ ἀνὰ λόγον ὅτι ἐναλλάξ, ᾗ ἀριθμοὶ καὶ ᾗ γραμμαὶ καὶ ᾗ στερεὰ καὶ ᾗ χρόνοι, ὥσπερ ἐδείκνυτό ποτε χωρίς, ἐνδεχόμενόν γε κατὰ πάντων μιᾷ ἀποδείξει δειχθῆναι· ἀλλὰ διὰ τὸ μὴ εἶναι ὠνομασμένον τι πάντα ταῦτα ἓν ἀριθμοὶ μήκη χρόνος στερεὰ καὶ εἴδει διαφέρειν ἀλλήλων χωρὶς ἐλαμβάνετο· νῦν δὲ καθόλου δείκνυται. Vgl. 1131[a] 30: τὸ γὰρ ἀνάλογον οὐ μόνον ἐστὶ μοναδικοῦ ἀριθμοῦ ἴδιον, ἀλλ' ὅλως ἀριθμοῦ.

ἀριθμὸς ἄρτιος, περισσός Euklid VII def. 6—7, τετράγωνος, κύβος Euklid VII def. 19—20 — 76[b] 6: τὰ δὲ τούτων πάθη καθ' αὑτά. τί μὲν σημαίνει ἕκαστον, λαμβάνουσιν, οἷον ἡ μὲν ἀριθμητική, τί περιττὸν ἢ ἄρτιον ἢ τετράγωνον ἢ κύβος; 1055[b] 24: ἀλλ' ἀνάγκη εἶναι ἢ περιττὸν ἢ ἄρτιον; 73[b] 20: ἀριθμῷ (sc. ὑπάρχει) τὸ περιττὸν ἢ τὸ ἄρτιον; vgl. 96[a] 29. —

1092ᵇ 11: *ὥσπερ οἱ τοὺς ἀριθμοὺς ἄγοντες εἰς τὰ σχήματα τρίγωνον καὶ τετράγωνον*; 1093ᵃ 6: *ἐνίους μὲν τούτων τετραγώνους εἶναι, ἐνίους δὲ κύβους, καὶ ἴσους, τοὺς δὲ διπλασίους.*

ἀρτιάκις ἄρτιος, ἀρτιάκις περισσός Euklid VII def. 8—9; der Sache nach angedeutet 1084ᵃ 3: *ἡ δὲ γένεσις τῶν ἀριθμῶν ἢ περιττοῦ ἀριθμοῦ ἢ ἀρτίου ἀεί ἐστιν, ὡδὶ μὲν τοῦ ἑνὸς εἰς τὸν ἄρτιον πίπτοντος περιττός, ὡδὶ δὲ τῆς μὲν δυάδος ἐμπιπτούσης ὁ ἀφ' ἑνὸς διπλασιαζόμενος, ὡδὶ δὲ τῶν περιττῶν ὁ ἄλλος ἄρτιος.* Vgl. Euklid IX 32.

πρῶτος, σύνθετος Euklid VII def. 12 und 14, *ἐπίπεδος, στερεός* Euklid VII def. 17—18 — 1020ᵇ 3: *ὥσπερ οἱ ἀριθμοὶ ποιοί τινες, οἷον οἱ σύνθετοι καὶ μὴ μόνον ἐφ' ἓν ὄντες, ἀλλ' ὧν μίμημα τὸ ἐπίπεδον καὶ τὸ στερεόν· οὗτοι δ' εἰσὶν οἱ ποσάκις ποσοὶ ἢ ποσάκις ποσάκις ποσοί*; 73ᵃ 39: *τὸ περιττὸν καὶ ἄρτιον ἀριθμῷ* (sc. *ὑπάρχει*) *καὶ τὸ πρῶτον καὶ σύνθετον καὶ ἰσόπλευρον καὶ ἑτερόμηκες* (die beiden letzten Termini nicht von Zahlen bei Euklid, der von der Arithmetik nur gibt, was für Buch X nötig ist, s. meine *Studien über Euklid* S. 30 ff.). Zu bemerken ist noch, daß 2 als Primzahl gilt nach 157ᵃ 39: *καθάπερ ἡ δυὰς τῶν ἀρτίων μόνος ἀριθμὸς πρῶτος*, was ebenfalls nach der Euklidischen Definition (VII def. 12: *πρῶτος ἀριθμός ἐστιν ὁ μονάδι μόνῃ μετρούμενος*) der Fall ist, wie Jamblichos *in Nikomach.* S. 30, 27 ff. *ed. Pistelli* tadelnd hervorhebt. Diese Abweichung von der Pythagoreischen Lehre (*Nikomach.* I 11, 2) ist also älter als Euklid. Vgl. Aristoteles 1052ᵃ 8: *ἄρτιον ἀριθμὸν πρῶτον εἶναι μηθένα*, was mit der obigen Äußerung verglichen einiges Schwanken verrät.

ἄλογον Euklid X def. 4 — 76ᵇ 9: *ἡ δὲ γεωμετρία* (sc. *λαμβάνει, τί σημαίνει*) *τί τὸ ἄλογον.* Auch *δύναμις* Quadrat ist natürlich dem Aristoteles bekannt, s. 1019ᵇ 33: *κατὰ μεταφορὰν δὲ ἡ ἐν τῇ γεωμετρίᾳ λέγεται δύναμις*; vgl. 1046ᵃ 7.

In allen diesen Fällen liegt kein Grund vor, bei Aristoteles eine andere Fassung der Definition anzunehmen als die Euklidische. Anders verhält es sich mit folgenden.

Eine genauere Einteilung der Linien — Euklid I def. 2—4 berücksichtigt neben dem Gattungsbegriff *γραμμή* nur die Spezies *εὐθεῖα* — wird vorausgesetzt 73ᵇ 19: *οἷον γραμμῇ* (sc. *ὑπάρχει*) *τὸ εὐθὺ ἢ τὸ καμπύλον*; 402ᵇ 19: *ὥσπερ ἐν τοῖς μαθήμασι, τί τὸ εὐθὺ καὶ καμπύλον ἢ τί γραμμὴ καὶ ἐπίπεδον*; 73ᵃ 38: *οἷον τὸ εὐθὺ ὑπάρχει γραμμῇ καὶ τὸ περιφερές* (vgl. 268ᵇ 20), was dem Platonischen Sprachgebrauch entspricht (*Parmenid.* 137 e: *οὔτε ἄρα εὐθὺ οὔτε περιφερές ἐστιν*; *Phileb.* 51 c: *εὐθύ τι λέγω, φησὶν ὁ λόγος, καὶ περιφερές*). Auch gebrochene Linien waren in den voreuklidischen Lehrbüchern, doch wohl bei der Definition der *γραμμαί*, berücksichtigt, s. 1016ᵃ 2: *καὶ γραμμή, κἂν κεκαμμένη ᾖ συνεχὴς δέ, μία λέγεται*; 1016ᵃ 12:

ἡ εὐθεῖα τῆς κεκαμμένης μᾶλλον ἕν; 76^b 9: ἡ δὲ γεωμετρία (sc. λαμβάνει), τί τὸ ἄλογον ἢ τὸ κεκλάσθαι; 228^b 23: ἡ τῆς κεκλασμένης κίνησις. Spuren dieses Sprachgebrauchs haben sich noch bei Euklid erhalten, *Elem.* III 20 S. 220, 6 κεκλάσθω δὴ πάλιν und *Data* 89 ἐὰν . . . κλασθῇ τις εὐθεῖα δεδομένην γωνίαν ποιοῦσα. Euklid hat also das Wort κλᾶσθαι als gemeinverständlich nicht definieren wollen und gegen sein sonstiges Verfahren technische Termini der früheren Lehrbücher weggelassen, weil sie nur für die vollständige Gliederung des Begriffs, nicht aber für die στοιχεῖα notwendig waren (wie schon Proklos *in Elem.* S. 74, 24 ff. bemerkt). Archimedes hat daher den Begriff der καμπύλη γραμμή wieder aufnehmen und erläutern müssen *De sph. et cyl.* I S. 6, 14 ff., und in den Heronischen Definitionen hat das alte Definitionssystem wider Gewohnheit den Sieg über das Euklidische davongetragen, s. Heron deff. 4: τῶν γραμμῶν αἱ μέν εἰσιν εὐθεῖαι, αἱ δὲ οὔ· καὶ τῶν μὴ[1]) εὐθειῶν αἱ μέν εἰσι κυκλικαὶ περιφέρειαι ὀνομαζόμεναι, αἱ δὲ ἑλικοειδεῖς, αἱ δὲ καμπύλαι (5: τίς εὐθεῖα γραμμή, 6: τίνες αἱ κυκλικαὶ γραμμαί, 7: τίνες αἱ καμπύλαι γραμμαί, 8: τίνες αἱ ἑλικοειδεῖς γραμμαί); die gebrochenen Linien werden Def. 14 bei Gelegenheit des Winkels nachgetragen: κεκλασμένη δὲ λέγεται γραμμή, ἥτις ἐκβαλλομένη οὐ συμπίπτει αὐτῇ καθ' αὑτήν. Es ist im Vergleich mit Heron bemerkenswert, daß die Schraubenlinie auch bei Aristoteles (neben der κεκλασμένη) auftritt, s. 228^b 24: οἷον ἡ τῆς κεκλασμένης κίνησις ἢ ἡ τῆς ἕλικος ἢ ἄλλου μεγέθους, ὧν μὴ ἐφαρμόττει τὸ τυχὸν ἐπὶ τὸ τυχὸν μέρος.

Freilich ist es sehr wenig wahrscheinlich, daß die alte Einteilung der γραμμαί im einzelnen bei Heron erhalten wäre. Proklos *in Elem.* S. 103—4 behauptet, daß Platon und Aristoteles die γραμμαί in εὐθεῖαι, περιφερεῖς und μικταί teilen; das ist aber nicht ganz richtig. Aristoteles (*de caelo* I 2, 268^b 17 ff.) sagt, daß ἡ εὐθεῖα und ἡ περιφερής als ἁπλαῖ zu betrachten sind, und daß daher πᾶσα κίνησις ὅση κατὰ τόπον, ἣν καλοῦμεν φοράν, ἢ εὐθεῖα ἢ κύκλῳ ἢ ἐκ τούτων μικτή sei, was mit der mathematischen Einteilung der γραμμαί nicht zusammenfällt. Platon spricht allerdings (*Parmenid.* 137 e: στρογγύλον γέ πού ἐστι τοῦτο, οὗ ἂν τὰ ἔσχατα πανταχῇ ἀπὸ τοῦ μέσου ἴσον ἀπέχῃ), als ob es neben der εὐθεῖα nur die Kreislinie gäbe, und dazu stimmen die angeführten Stellen des Aristoteles 73^a 38, 268^b 20 (αἱ ἴσαι γραμμαὶ εὐθεῖαι 1054^b 1). Das kann aber unmöglich in den mathematischen Lehrbüchern so gestanden haben. Nach Aristoteles 73^b 19 (s. oben) möchte man vermuten, daß die γραμμαί, nach Ausscheidung der κεκλασμέναι, nach dem pythagoreischen Schema (986^a 25) in εὐθεῖαι und καμπύλαι eingeteilt wurden; von letzteren müßte dann die περιφερής (κύκλου γραμμή 373^a 5) eine Spezies

---

1) μέν bei Hultsch ist Schreibfehler.

gewesen sein, definiert wie *στρογγύλον* in der Parmenidesstelle als Vorbereitung zur Definition des Kreises (etwa *σχῆμα ἐπίπεδον ὑπὸ γραμμῆς περιφεροῦς περιεχόμενον*). Doch bleibt das unsicher, und 1407[b] 27: *τὸ λόγῳ χρῆσθαι ἀντ' ὀνόματος, οἷον μὴ κύκλον ἀλλ' ἐπίπεδον τὸ ἐκ τοῦ μέσου ἴσον* scheint die Euklidische Definition des Kreises vorauszusetzen; 1020[a] 35: *κύκλος ποιόν τι σχῆμα ὅτι ἀγώνιον* lehrt nichts. Das Wort *περιφέρεια* kam schwerlich in der Definition des Kreises vor. Platon kennt es noch nicht, Aristoteles verwendet es bald im allgemeinen Sinne (350[a] 11, 492[a] 31,. 494[b] 14, 498[a] 7, 502[b] 2, 542[a] 16, 656[b] 28, 680[b] 22, 704[a] 19, 758[b] 10), bald im engeren mathematischen (vom Regenbogen 372[a] 3, 375[a] 2, [b] 4, als Gegensatz zu *εὐθύτης* 385[b] 30, *στρογγύλα καὶ περιφέρειαν ἔχοντα* 559[a] 29) und zwar sowohl für Kreisbogen (217[b] 3, 240[b] 2, 264[b] 25, 1102[a] 31) als für Umkreis (340[b] 35). Euklid war also vollkommen berechtigt, das Wort als gemeinverständlich, ohne besondere mathematische Bedeutung, undefiniert zu lassen. Von den beiden Interpolationen *ἣ καλεῖται περιφέρεια* und *πρὸς τὴν τοῦ κύκλου περιφέρειαν* I def. 15 abgesehen, die in vielen Quellen fehlen (*Euclidis opp.* V S. XCI, hinzugekommen ein Papyrus aus Herculanum, *Oversigt over Vidensk. Selskabs Forhandlinger* 1900 S. 161), und nur aus Rücksicht auf die folgenden Definitionen entstanden sind, tritt das Wort unvermittelt auf I def. 17—18 und wird dann öfters verwendet sowohl für Kreisbogen (III def. 6—10, III 26—32, 36) als für (den ganzen) Umkreis (III 2, 8, 16, 37), beides sogar dicht nebeneinander (III 20, 21).

In der Proportionslehre kennt Aristoteles die Bezeichnung *ὅρος* für Glied 1131[b] 5, 9, die Euklid V def. 8: *ἀναλογία δὲ ἐν τρισὶν ὅροις ἐλαχίστη ἐστίν* unvermittelt einführt. Diese Definition lautet 1131[a] 31: *ἡ γὰρ ἀναλογία . . . ἐν τέτταρσιν ἐλαχίστοις* (so auch cod. V im Euklid), aber der Unterschied ist nur formell, wie Z. 33 ff. zeigt (*τῷ γὰρ ἑνὶ ὡς δυσὶ χρῆται καὶ δὶς λέγει, οἷον, ὡς ἡ τοῦ* $\overline{α}$ *πρὸς τὴν τοῦ* $\overline{β}$, *οὕτως καὶ ἡ τοῦ* $\overline{β}$ *πρὸς τὴν τοῦ* $\overline{γ}$· *δὶς οὖν ἡ τοῦ* $\overline{β}$ *εἴρηται· ὥστ' ἐὰν ἡ τοῦ* $\overline{β}$ *τεθῇ δίς, τέτταρα ἔσται τὰ ἀνάλογα*). Ein reeller Unterschied liegt in der Beibehaltung der Termini *ἡ μὲν οὖν διῃρημένη* (*ἀναλογία*) *ὅτι ἐν τέτταρσι, δῆλον· ἀλλὰ καὶ ἡ συνεχής* 1131[a] 32 und *καλοῦσι δὲ τὴν τοιαύτην ἀναλογίαν γεωμετρικὴν οἱ μαθηματικοί* 1131[b] 12, während Euklid diese pythagoreische (*Nikomachos* II 22, 1; 23, 3, wo *συνημμένη* statt *συνεχής*) Erbschaft nicht berücksichtigt (*διῃρημένα* bei ihm anders V 18). Derselben Quelle entstammt vermutlich *ἡ γὰρ ἀναλογία ἰσότης ἐστὶ λόγων* 1131[a] 31; eine ähnliche Definition, *ἀναλογία δὲ ἡ τῶν λόγων ταυτότης* oder *ὁμοιότης*, ist in vielen Hss. bei Euklid interpoliert (s. *Opp.* II S. 2, 5 und 4, 6 not.).

Eine Definition der Kugel, die der Euklidischen Definition des Kreises

(und der angeführten 1407ᵇ 27) entspricht, wird vorausgesetzt 1033ᵇ 14: *εἰ δή ἐστι σφαῖρα τὸ ἐκ τοῦ μέσου σχῆμα ἴσον*, 287ᵃ 19: *εἴ τι ἄλλο σχῆμα* (als die Kugel) *γένοιτο, μὴ ἴσας ἔχον τὰς ἐκ τοῦ μέσου γραμμάς*. Die Euklidische (XI def. 14), die eigentlich eine Beschreibung ihrer Entstehung ist, wird wohl von ihm selbst herrühren. Dasselbe muß dann auch von den ganz analogen Definitionen des Kegels (XI def. 18) und des Zylinders (XI def. 21) gelten, was dadurch bestätigt wird, daß die Bezeichnung *ἄξων*, die von den Euklidischen Definitionen nicht getrennt werden kann, dem Aristoteles[1]) noch nicht im mathematischen Sinne geläufig ist, s. 375ᵇ 21: *ἐὰν αἱ ἀπὸ τοῦ Κ γραμμαὶ κατὰ κῶνον ἐκπίπτουσαι ποιῶσιν ὥσπερ ἄξονα τὸν ἐφ' ᾗ ἡ ΗΚ* (nachher ohne weiteres *ἄξων* 376ᵇ 30), mit der richtigen Bemerkung Olympiodors (Ideler, *Meteorol.* II S. 150): *καλῶς δ' εἶπεν οἷον ἄξονα, ἐπειδὴ οὐ κυρίως ἐστὶν οὗτος ἄξων, ἀλλὰ νοεῖται, ἐπειδὴ κατὰ περιαγωγὴν τῶν τριγώνων γίνεται οὗτος ἄξων, ἐπειδὴ κυρίως ἡ κάθετός ἐστιν ἡ ἀπὸ τοῦ ὄμματος ἐπὶ τὸ νέφος πεμπομένη*. Von *βάσις* (und *κορυφή*) eines Kegels (Euklid XI def. 20) spricht Aristoteles 362ᵇ 2 ff.

τετράγωνον ist schon bei den Pythagoreern Quadrat (986ᵃ 26) und so auch meist bei Aristoteles (z. B. 11ᵃ 10, 15ᵃ 30, 306ᵇ 6, zweifelhaft 272ᵇ 19), aber 414ᵇ 31 scheint es Viereck zu bedeuten, und 1054ᵃ 2: *τὰ ἴσα καὶ*[2]) *ἰσογώνια τετράγωνα* muß es Viereck sein, wenn *ἰσογώνια* einen Sinn haben soll (1054ᵇ 5 ist an und für sich beides möglich). Wahrscheinlich hat Euklid dieses Schwanken beseitigt, wenigstens im mathematischen Sprachgebrauch, durch Einführung des Terminus *τετράπλευρον* I def. 19, dessen Schluß: *τρίπλευρα μὲν τὰ ὑπὸ τριῶν, τετράπλευρα δὲ τὰ ὑπὸ τεσσάρων, πολύπλευρα δὲ τὰ ὑπὸ πλειόνων ἢ τεσσάρων εὐθειῶν περιεχόμενα* ohne Zweifel ihm selbst gehört. Weder Platon noch Aristoteles kennt die drei hier definierten Wörter (wohl aber die *Mechanik* 848ᵇ 20 und die *Probleme* 911ᵇ 3 *τετράπλευρον*).

Bei der Definition der *μονάς* (VII def. 1: *μονάς ἐστιν, καθ' ἣν ἕκαστον τῶν ὄντων ἓν λέγεται*) hat Euklid jede Erinnerung an die pythagoreische Spielerei mit Punkt und Monade weggeworfen, die noch bei Aristoteles spukt, s. 72ᵃ 21: *τίθεται γὰρ ὁ ἀριθμητικὸς μονάδα τὸ ἀδιαίρετον εἶναι κατὰ τὸ ποσόν*, 1089ᵇ 35: *καὶ ἡ μονάς, εἰ μὴ μέτρον, ὅτι τὸ κατὰ τὸ ποσὸν ἀδιαίρετον* und deutlicher 1016ᵇ 24: *τὸ μὲν οὖν κατὰ τὸ ποσὸν καὶ ᾗ ποσὸν ἀδιαίρετον τὸ μὲν πάντῃ καὶ ἄθετον λέγεται μονάς, τὸ δὲ πάντῃ καὶ θέσιν ἔχον στιγμή*, 29: *τὸ δὲ μηδαμῇ διαιρετὸν κατὰ τὸ ποσὸν στιγμὴ καὶ μονάς*,

---

1) Dagegen *Περὶ κόσμου* 391ᵇ 24: *καλοῦνται δ' οὗτοι πόλοι, δι' ὧν εἰ νοήσαιμεν ἐπεζευγμένην εὐθεῖαν, ἥν τινες ἄξονα καλοῦσι, διάμετρος ἔσται τοῦ κόσμου.*

2) *καὶ τά* die Hss., das richtige *Alexandros* S. 615, 30 *ed. Hayduck.*

ἡ μὲν ἄθετος μονάς, ἡ δὲ θετὸς στιγμή, 87ᵃ 36: μονὰς οὐσία ἄθετος, στιγμὴ δὲ οὐσία θετός; jedoch bekämpft er die Identifikation der beiden Begriffe bei den Pythagoreern, s. 1084ᵇ 23 ff. (26: ἡ γὰρ μονὰς στιγμὴ ἄθετός ἐστιν, vgl. Proklos *in Elem.* S. 95, 21: οἱ Πυθαγόρειοι τὸ σημεῖον ἀφορίζονται μονάδα προσλαβοῦσαν θέσιν, Aristot. 88ᵃ 23: αἱ μονάδες ταῖς στιγμαῖς οὐκ ἐφαρμόττουσιν· αἱ μὲν γὰρ οὐκ ἔχουσι θέσιν, αἱ δὲ ἔχουσιν), vgl. 227ᵃ 27: εἰ ἔστι στιγμὴ καὶ μονάς, οἵας λέγουσι κεχωρισμένας, οὐχ οἷόν τε εἶναι μονάδα καὶ στιγμὴν τὸ αὐτό, 1069ᵃ 12: ὥστ' οὐκ ἔστι στιγμὴ μονάδι ταὐτόν. Hervorgegangen ist die Euklidische Definition aus Stellen wie 1057ᵃ 4: ἀντίκειταί πως τὸ ἓν καὶ ἀριθμός, οὐχ ὡς ἐναντίον, ἀλλ' ὥσπερ εἴρηται τῶν πρός τι ἔνια· ᾗ γὰρ μέτρον, τὸ δὲ μετρητόν, ταύτῃ ἀντίκειται. διὸ οὐ πᾶν, ὃ ἂν ᾖ ἕν, ἀριθμός ἐστιν (daher τῶν ὄντων bei Euklid).

Es ist auffallend, daß Aristoteles 76ᵇ 9 (ἡ δὲ γεωμετρία, τί τὸ ἄλογον ἢ τὸ κεκλάσθαι ἢ νεύειν, sc. λαμβάνει) neben Definitionen der Elementarmathematik auch die des νεύειν als geläufiges Beispiel anführt; denn die νεύσεις sind von den Elementen ausgeschlossen und werden, später wenigstens, durch Kegelschnitte gelöst. Es liegt nahe, hierin eine Bestätigung der Ansicht von Oppermann und Zeuthen (*Die Lehre von den Kegelschnitten im Altertum* S. 261 ff.) zu sehen, daß die νεύσεις früher auf mechanischem Wege bewerkstelligt wurden und so auch in der elementaren Mathematik eine Rolle spielen konnten; von den Kegelschnitten, die sein Mitschüler Menaichmos entdeckt hatte, verrät Aristoteles nicht die geringste Kenntnis, und daß er mehrfach die Versuche der Kreisquadratur berücksichtigt (69ᵃ 30, 75ᵇ 40, 171ᵇ 15, 185ᵃ 16; über die Natur des Problems ist er sich nicht im klaren, s. 7ᵇ 31, vgl. 248ᵃ 18—25), darf bei der Berühmtheit des Problems nicht so verallgemeinert werden, als ob er überhaupt in der höheren Mathematik zu Hause wäre und das gleiche bei seinen Hörern und Lesern voraussetzen dürfte. Ebensowenig beweist die Erwähnung der Analysis (175ᵃ 27: καθάπερ ἐν τοῖς διαγράμμασιν· καὶ γὰρ ἐκεῖ ἀναλύσαντες ἐνίοτε συνθεῖναι πάλιν ἀδυνατοῦμεν); denn die von Platon inaugurierte analytische Methode konnte auch in den Elementen zur Verwendung kommen (*Euclidis opp.* V S. LXXXIV).

Ein paar längere mathematische Stellen (373ᵃ 4—17, 375ᵇ 19 bis 376ᵇ 22) gestatten uns einen Einblick in die mathematische Redeweise der Zeit im allgemeinen; sie stimmt in Form und Wortschatz wesentlich mit der Euklidischen, so ἐπεζεύχθω 373ᵃ 10, 375ᵇ 23, 376ᵃ 17, 27; ἐπ' ἴσης (sc. βεβηκέναι) 373ᵃ 10; ἤχθωσαν κάθετοι ἐπί . . ἀπό 373ᵃ 11, αἱ κάθετοι πεσοῦνται 376ᵇ 19, aber πρὸς ὀρθάς 373ᵃ 14; κύκλον γράφειν 373ᵃ 16 und κ. γρ. διαστήματι 376ᵇ 8; προσπίπτειν πρὸς περιφέρειαν 375ᵇ 25; ἀποληφθήσεται 27; ἐπίπεδον ἐκβεβλήσθω 31, 376ᵇ 1; τομή 375ᵇ 32, 376ᵃ 7;

συσταθήσονται 376ª 2, 9, ᵇ 2 und τρίγωνα συνεστήκασιν ἐπί ᵇ 17—18; ἐκκείσθω ª 10; τετμήσθω ὡς ª 10; πεποιήσθω ª 17; μὴ γὰρ ἔστω ἀλλ' ª 21 (ἔστω pflegt bei Euklid zu fehlen); ὅπερ ἀδύνατον ᵇ 3, 12; γωνίαν ποιεῖν ᵇ 9—10, 15, 16; ὁμοίως δειχθήσεται ᵇ 10; πιπτέτωσαν ἐπὶ τὸ *O* ᵇ 20; ἐπεὶ οὖν ἡ *Δ* οὔτε πρὸς ἐλάττω τῆς *ΠΜ* οὔτε πρὸς μείζω· ὁμοίως γὰρ δείξομεν· δῆλον, ὅτι πρὸς αὐτήν ᵇ 3 ff.; λόγον ἔχειν ª 23 usw. — alles leicht aus Euklid zu belegen. Abweichend ist außer ἐφάπτεσθαι für ἅπτεσθαι (376ª 6, ᵇ 8), ein Unterschied, der selbst in den Euklidhandschriften zuweilen verwischt wird (*Euclidis opp.* I S. 217, 23 adnot. crit., V S. LVII), eigentlich nur die Formel für die Proportion: ὥστ' εἶναι, ὅπερ (für ὡς) τὴν *Δ* πρὸς τὴν *B*, (οὕτως gewöhnlich bei Euklid, doch kann es auch fehlen) τὴν *BZ* πρὸς τὴν *Δ* 376ª 15, 16, 19, 25, ᵇ 6, 1131ᵇ 14 (aber ὡς 1131ᵇ 1, 5, 6). Un-Euklidisch ist ferner πρὸς ὀρθήν 272ᵇ 25, 363ᵇ 2, 709ª 16 (das richtige πρὸς ὀρθάς 373ª 14) und πρὸς ὁμοίας γωνίας 296ᵇ 20, 311ᵇ 34 statt πρὸς ἴσας γ., s. *Simplikios de caelo* S. 538, 21: ὁμοίας δὲ ἐκάλουν τὰς ἴσας γωνίας οἱ τὴν γωνίαν ὑπὸ τὸ ποιὸν ἀνάγοντες (wie Eudemos, βιβλίον περὶ γωνίας γράψας ποιότητα αὐτὴν εἶναι συνεχώρησεν, Proklos *in Elem.* S. 125, 7 ff.). Vgl. 1021ª 11: ὅμοια δ', ὧν ἡ ποιότης μία, ἴσα δέ, ὧν τὸ ποσὸν ἕν.

Weit bedeutender ist der Unterschied in der Bezeichnung der Buchstaben auf der Figur; hier scheint Euklid mit der alten schwerfälligen Weise, die z. B. auch im Hippokratesfragment des Eudemos vorkommt (Bretschneider, *Die Geometrie und die Geometer vor Euklides* S. 114 Anm.), gründlich aufgeräumt und der Inkonsequenz ein Ende gemacht zu haben. Es kommen vor: für den Punkt neben τὸ *A* (373ª 6, 9, 15, 17, 375ᵇ 20 usw.) ἐφ' ᾧ τὸ *A* 373ª 6, 375ᵇ 9, 10, 20, 21, 376ᵇ 7, 14, 377ª 1, ἐφ' οὗ τὸ *B* 363ᵇ 1, 34, 377ª 6, οὗ τὸ *H* 375ᵇ 30, ἐφ' ᾧ *A* 363ª 34, 376ᵇ 32, ἐφ' οὗ *Π* 363ᵇ 2, 3, 4, 5, 6, ähnlich 94ᵇ 13; für die Gerade neben ἡ *Δ* (376ª 11, 14, 16, 20, 24, ᵇ 4) und ἡ *AB* (373ª 8, 9, 10, 11, 15, 375ᵇ 31, 34 usw.) ἡ τὸ *AB* oder ἡ τὸ *Δ* 373ª 7, 12, 13, 376ª 16, 18, 26, ᵇ 1, 6, 7, ähnlich 94ª 32, ἡ ἐφ' ᾗ ἡ *HK* 375ᵇ 22, ἐφ' ἧς τὸ *Z* 376ª 15, ᵇ 29, ἐφ' ᾧ τὸ *HΠ* 376ᵇ 30, ἐφ' ᾗ *MΠ* 376ᵇ 5, 8, 13, vgl. noch ἡ *BZ* für αἱ *B*, *Z* (*B* + *Z*) 376ª 15, 25 und ähnlich γραμμή ἡ *ΔB* 376ª 10; ebenso κύκλος ὁ ἐφ' ᾧ *A* 375ᵇ 33, τοῦ ἐφ' ᾧ *A* ἡμικυκλίου 376ª 2, aber 376ᵇ 13 ἡμικύκλιον τὸ ἐφ' ᾧ τὸ *A*, 377ª 7 τμῆμα ἡμικυκλίου τὸ ἐφ' ᾧ *ΨΥΩ*, τοῦ *MH* κύκλου 376ᵇ 10, vgl. ὁρίζοντος τοῦ ἐφ' ᾧ τὸ *AΓ* 376ᵇ 32, 377ª 3, περιφέρεια ἐφ' ἧς τὰ *NM* 376ª 7, ἡ περὶ τὸ *ΓZΔ* περιφέρεια 373ª 17, ἡ *MN* περιφέρεια 376ᵇ 2; für den Winkel (Euklid ἡ ὑπὸ *ABΓ*) γωνία ἡ *Γ* 373ª 12, 13, 376ª 29, 41ᵇ 17, 20, ἡ *AΓ* γωνία (d. i. *A* + *Γ*) 41ᵇ 16, γωνία ἡ *KMH* 376ᵇ 16, ἐφ' ἧς *A* 94ª 29, 30; für das Dreieck neben τρίγωνον τὸ *KMH* (376ª 1, 13, 30, ᵇ 18) τρίγωνον ἐν ᾧ τὸ *HKM* 375ᵇ 32, vgl. ἐπίπεδον ἐν ᾧ τὸ *A* 375ᵇ 31.

Noch sei bemerkt, daß *I* verwendet wird 363[b] 28, 31, und daß nach *πρός* der Artikel einigemal fehlt (376[a] 22, 25, [b] 7). Daß die Reihenfolge der Buchstaben bei derselben Größe sich nicht gleich bleibt, ist auch später Regel.

Von Sätzen, die bei Euklid stehen, kommen vor, meist nur angedeutet oder vorausgesetzt:

Elem. I 8: *ἐὰν δύο τρίγωνα τὰς δύο πλευρὰς ταῖς δύο πλευραῖς ἴσας ἔχῃ ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, ἔχῃ δὲ καὶ τὴν βάσιν τῇ βάσει ἴσην, καὶ τὴν γωνίαν τῇ γωνίᾳ ἴσην ἕξει τὴ ὑπὸ τῶν ἴσων εὐθειῶν περιεχομένην* — 373[a] 8: *ἴσαι δ᾽ αὗταί τε αἱ ΑΓ ΑΖ ΑΔ ἀλλήλαις καὶ αἱ πρὸς τὸ Β ἀλλήλαις οἷον αἱ ΓΒ ΖΒ ΔΒ. καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΕΒ· ὥστε τὰ τρίγωνα ἴσα· καὶ γὰρ ἐπ᾽ ἴσης τῆς ΑΕΒ.* Die Form der Schlußfolgerung spricht dafür, daß die dem Aristoteles vorliegende Gestaltung des Satzes nicht nur die Gleichheit der Winkel, sondern auch die der Dreiecke behauptete, welch letzteres Euklid fortläßt, weil er vorläufig in I 9 nur jenes braucht und weil es aus I 4 unmittelbar folgt. Wir sehen also hier an einem klaren Beispiel, wie ältere Bausteine von Euklid für den straffen Bau seiner *στοιχεῖα* umgemodelt wurden (vgl. Proklos *in Elem.* S. 269, 26 ff.). Daß Aristoteles so wenig wie Euklid ein Wort für kongruent hat, ist selbstverständlich; beide sagen dafür *ἴσος καὶ ἰσογώνιος* (1054[b] 2: *τὰ ἴσα καὶ ἰσογώνια τετράγωνα*, Euklid VI 14: *τῶν ἴσων τε καὶ ἰσογωνίων παραλληλογράμμων*).

I 12: *ἐπὶ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν ἄπειρον ἀπὸ τοῦ δοθέντος σημείου, ὃ μή ἐστιν ἐπ᾽ αὐτῆς, κάθετον εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν* — 373[a] 11: *ἤχθωσαν δὴ κάθετοι ἐπὶ τὴν ΑΕΒ ἐκ τῶν γωνιῶν.*

I 19: *παντὸς τριγώνου ὑπὸ τὴν μείζονα γωνίαν ἡ μείζων πλευρὰ ὑποτείνει* — 376[a] 11: *μείζων δὲ ἡ ΜΗ τῆς ΜΚ . . . ὑπὸ γὰρ τὴν μείζω γωνίαν ὑποτείνει τοῦ*[1]) *ΚΜΗ τριγώνου.* Hier stimmen auch die Worte genau.

I 20: *παντὸς τριγώνου αἱ δύο πλευραὶ τῆς λοιπῆς μείζονές εἰσι πάντῃ μεταλαμβανόμεναι* — 709[a] 32: *εἰ μὴ αἱ δύο τῆς μιᾶς μείζους ἦσαν.*

I 28: *ἐὰν εἰς δύο εὐθείας εὐθεῖα ἐμπίπτουσα τὴν ἐκτὸς γωνίαν τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη ἴσην ποιῇ ἢ τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας, παράλληλοι ἔσονται ἀλλήλαις αἱ εὐθεῖαι* — 74[a] 13: *εἰ οὖν τις δείξειεν, ὅτι αἱ ὀρθαὶ* (senkrechte Geraden) *οὐ συμπίπτουσι, δόξειεν ἂν τούτου εἶναι ἡ ἀπόδειξις διὰ τὸ ἐπὶ πασῶν εἶναι τῶν ὀρθῶν. οὐκ ἔστι δέ, εἴπερ μή, ὅτι ὡδὶ ἴσαι* (sc. *αἱ γωνίαι, ἡ ἐκτὸς τῇ ἐντός*), *γίνεται τοῦτο, ἀλλ᾽ ᾗ ὁπωσοῦν ἴσαι*; 66[a] 11: *ἐπεὶ ταὐτό γε ψεῦδος συμβαίνειν διὰ πλειόνων ὑποθέσεων οὐδὲν ἴσως ἄτοπον, οἷον τὰς παραλλήλους συμπίπτειν, καὶ εἰ μείζων ἐστὶν ἡ ἐντὸς τῆς ἐκτός, καὶ εἰ τὸ τρίγωνον ἔχει πλείους ὀρθὰς δυεῖν.* Der erste Bedingungssatz zeigt, daß 74[a] 13 auf *Elem.* I 28, nicht

---

1) So eine Hs., die übrigen *τὴν τοῦ*.

auf I 27, bezogen werden muß, der zweite, daß auch I 27 dem Aristoteles bekannt war; denn nur in diesem Satz kann die Summe der Dreieckswinkel eine Rolle spielen. Bei Euklid wird nur I 16 benutzt (*παντὸς τριγώνου μιᾶς τῶν πλευρῶν προσεκβληθείσης ἡ ἐκτὸς γωνία ἑκατέρας τῶν ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον γωνιῶν μείζων ἐστίν*); seine Vorgänger scheinen aber unvorsichtig gewesen zu sein, s. 65ᵃ 4: *ὅπερ ποιοῦσιν οἱ τὰς παραλλήλους οἰόμενοι γράφειν· λανθάνουσι γὰρ αὐτοὶ ἑαυτοὺς τοιαῦτα λαμβάνοντες, ἃ οὐχ οἷόν τε ἀποδεῖξαι μὴ οὐσῶν τῶν παραλλήλων.* Unter den *τοιαῦτα* ist wohl eben der Satz von der Summe der Dreieckswinkel. Die ältere Theorie der Parallelen muß also einen Zirkelschluß verschuldet haben. Leider sind die Worte des Aristoteles so unbestimmt (*παραλλήλους γράφειν!*), daß Näheres daraus nicht zu ermitteln ist; es läßt sich aber vermuten, daß diese Unklarheit der früheren Lehrbücher Euklid veranlaßt hat, das berühmte Parallelaxiom (*αἰτ.* 5) aufzustellen und I 16 vorauszuschicken vor dem vollständigen Satz (I 32). Vgl. noch 77ᵇ 22: *τὸ δὲ τὰς παραλλήλους συμπίπτειν οἴεσθαι γεωμετρικόν πως καὶ ἀγεωμέτρητον ἄλλον τρόπον.*

I 31: *διὰ τοῦ δοθέντος σημείου τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ παράλληλον εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν* — 1051ᵃ 25: *εἰ οὖν ἀνῆκτο ἡ παρὰ τὴν πλευράν.*

I 32: . . . *αἱ ἐντὸς τοῦ τριγώνου τρεῖς γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν* — *τὸ τρίγωνον ἔχει δυσὶν ὀρθαῖς ἀεὶ τὰς γωνίας ἴσας* 252ᵇ 2, *τὰς τοῦ τριγώνου ὅτι δύο ὀρθαῖς ἴσαι* 449ᵇ 20, *πᾶν τρίγωνον ἔχει δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας* 71ᵃ 19, ähnlich 76ᵃ 6, 200ᵃ 17, 643ᵃ 29, 742ᵇ 26; *πρὸς τὸ κατιδεῖν, πόσαις ὀρθαῖς αἱ τοῦ τριγώνου γωνίαι ἴσαι* 402ᵇ 20. Dieser Satz ist Lieblingsbeispiel des Aristoteles[1]), wo er eine allgemein angenommene Wahrheit bezeichnen will, und wird oft verkürzt, ja bis ins sinnlose verunstaltet angeführt, s. 67ᵃ 15: *πᾶν τρίγωνον ἔχει δύο ὀρθάς*, ähnlich 281ᵇ 5, 1025ᵃ 32, 1026ᵇ 12, 1052ᵃ 6; *τὸ δὲ τρίγωνον κατὰ τὴν δυάδα, ἐπειδὴ δύο ὀρθαί* 287ᵃ 1; *πᾶν τρίγωνον ὅτι δύο ὀρθαῖς* 67ᵃ 17, ähnlich 1086ᵇ 34; *δύο ὀρθαὶ τὸ τρίγωνον* 1051ᵃ 24; *καὶ τῷ τριγώνῳ ᾗ τρίγωνον δύο ὀρθαί· καὶ γὰρ καθ' αὑτὸ τὸ τρίγωνον δύο ὀρθαῖς ἴσον* 73ᵇ 30, *ὑπάρχει παντὶ τριγώνῳ τὸ δύο* 85ᵇ 11. Daß der Beweis schon zu Aristoteles' Zeit derselbe war als bei Euklid, beweist die Stelle 1051ᵃ 24: *διὰ τί δύο ὀρθαὶ τὸ τρίγωνον; ὅτι αἱ περὶ μίαν στιγμὴν γωνίαι ἴσαι δύο ὀρθαῖς· εἰ οὖν ἀνῆκτο ἡ παρὰ τὴν πλευράν, ἰδόντι ἂν ἦν εὐθὺς δῆλον*, wo *ἀνῆκτο* nur mit Fig. 1 vereinbar ist, nicht mit Fig. 2. Alexandros S. 596, der Fig. 3 voraus-

Fig. 1. Fig. 2. Fig. 3.

1) Schon von Proklos bemerkt, *in Elem.* S. 384, 7: *Ἀριστοτέλης πρόχειρον ἔχει τὸ παράδειγμα τοῦτο ἐν ταῖς ἀποδεικτικαῖς πραγματείαις τὸ ᾗ αὐτὸ θεωρῶν*, s. 85ᵇ 12, vgl. 73ᵇ 33, 84ᵇ 7 und besonders 74ᵃ 30 ff.

setzt, versteht (Z. 14—15) *ἀνῆκτο* von der Verlängerung der Geraden *βγ*, was ganz unmöglich ist. Mit beiden Figuren vereinbar ist 200^a 16: *ἐπεὶ γὰρ τὸ εὐθὺ τοδί ἐστιν, ἀνάγκη τὸ τρίγωνον δύο ὀρθαῖς ἴσας ἔχειν*; denn daß die Summe der Winkel an einer Geraden 2R ist (Euklid I 13—14), kommt in beiden Fällen zur Verwendung. Den Beweis der Pythagoreer, mittels einer Parallelen durch den Scheitelpunkt wie in Fig. 2, hat Proklos *in Elem.* S. 379 aus Eudemos. Wenn also Geminos (bei Eutokios *in Apollonium* II S. 170) mit Recht behauptet, die alten (*οἱ ἀρχαῖοι*) hätten den Satz für jede der drei Arten von Dreiecken einzeln bewiesen, und erst später wäre ein allgemeiner Beweis gefunden, so müßte das für die vorpythagoreische Mathematik gelten. Das widerspricht aber dem Bericht des Eudemos (Proklos S. 379, 2: *Εὔδημος δὲ ὁ Περιπατητικὸς εἰς τοὺς Πυθαγορείους ἀναπέμπει τὴν τοῦδε τοῦ θεωρήματος εὕρεσιν, ὅτι τρίγωνον ἅπαν δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας ἔχει τὰς ἐντὸς γωνίας*; selbst wenn man hier das *ἅπαν* pressen wollte, ist es doch klar, daß Eudemos von einer Vorstufe des pythagoreischen Beweises nichts berichtete), und ich fürchte, daß die ganze Nachricht des Geminos auf Mißdeutung einer Aristotelesstelle beruht. 74^a 25 heißt es nämlich: *διὰ τοῦτο οὐδ᾽ ἄν τις δείξῃ καθ᾽ ἕκαστον τὸ τρίγωνον ἀποδείξει ἢ μιᾷ ἢ ἑτέρᾳ, ὅτι δύο ὀρθὰς ἔχει ἕκαστον, τὸ ἰσόπλευρον χωρὶς καὶ τὸ σκαληνὲς καὶ τὸ ἰσοσκελές, οὔπω οἶδε τὸ τρίγωνον ὅτι δύο ὀρθαῖς*; aus diesem Beispiel eines logischen Satzes konnte bei einiger Unkritik leicht ein historisches Faktum werden.

Der pythagoreische Lehrsatz (I 47) ist zitiert 708^b 31: *καὶ ὀρθὸν δεῖ εἶναι τὸ ὑφεστὸς τῷ βάρει, οἷον κάθετον πρὸς τὴν γῆν. ὅταν δὲ προβαίνῃ, γίνεται ἡ ὑποτείνουσα καὶ δυναμένη τὸ μένον μέγεθος καὶ τὴν μεταξύ*; 709^a 19: *δυνήσεται γὰρ τοῦτο τό τ᾽ ἠρεμοῦν καὶ τὴν ὑποτείνουσαν* (d. i. *τὴν μεταξύ*).

II 14: *τῷ δοθέντι εὐθυγράμμῳ ἴσον τετράγωνον συστήσασθαι* — ein spezieller Fall 413^a 17: *οἷον τί ἐστι τετραγωνισμός; τὸ ἴσον ἑτερομήκει ὀρθογώνιον εἶναι ἰσόπλευρον. ὁ δὲ τοιοῦτος ὅρος λόγος τοῦ συμπεράσματος, ὁ δὲ λέγων, ὅτι ἐστὶν ὁ τετραγωνισμὸς μέσης εὕρεσις, τοῦ πράγματος λέγει τὸ αἴτιον*; 996^b 20: *οἷον τί ἐστι τὸ τετραγωνίζειν, ὅτι μέσης εὕρεσις.* Also wurde das Problem in den Aristoteles vorliegenden Lehrbüchern demnach mittels Proportionen gelöst (vgl. Euklid VI 17), was in II 14 nicht der Fall ist.

III 9: *ἐὰν κύκλου ληφθῇ τι σημεῖον ἐντός, ἀπὸ δὲ τοῦ σημείου πρὸς τὸν κύκλον προσπίπτωσι πλείους ἢ δύο ἴσαι εὐθεῖαι, τὸ ληφθὲν σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ κύκλου* — 373^a 11: *ἤχθωσαν δὴ κάθετοι ἐπὶ τὴν ΑΕΒ ἐκ τῶν γωνιῶν, ἀπὸ μὲν τῆς Γ ἡ τὸ ΓΕ, ἀπὸ δὲ τῆς Ζ ἡ τὸ ΖΕ, ἀπὸ δὲ τῆς Δ ἡ τὸ ΔΕ. ἴσαι δὴ αὗται . . . κύκλος ἄρα ἔσται ἡ γραφομένη, κέντρον δὲ τὸ Ε.* Wenn der Kreis oder Kreisbogen hier als geometrischer Ort

behandelt wird (373^a 4: *ἀπὸ γὰρ τοῦ αὐτοῦ σημείου πρὸς τὸ αὐτὸ σημεῖον αἱ ἴσαι κλασθήσονται ἐπὶ κύκλου γραμμῆς ἀεί*), wird man daran erinnert, daß der etwa gleichaltrige Mitschüler des Aristoteles Hermotimos *τῶν τόπων τινὰ συνέγραψεν* (Proklos *in Elem.* S. 67, 23).

III 15: *ἐν κύκλῳ μεγίστη μὲν ἡ διάμετρος* — 363^a 32: *πλεῖστον δ' ἀπέχει κατὰ τόπον τὰ κείμενα πρὸς ἄλληλα κατὰ διάμετρον*, 363^b 8: *πλεῖστον δ' ἀπέχει τὰ κατὰ διάμετρον.*

III 31: *ἐν κύκλῳ ἡ μὲν ἐν τῷ ἡμικυκλίῳ γωνία ὀρθή ἐστιν* — 94^a 28: *διὰ τί ὀρθὴ ἡ ἐν ἡμικυκλίῳ ἢ τίνος ὄντος ὀρθή; ἔστω δὴ ὀρθὴ ἐφ' ἧς A, ἡμίσεια δυοῖν ὀρθαῖν ἐφ' ἧς B, ἡ ἐν ἡμικυκλίῳ ἐφ' ἧς Γ. τοῦ δὴ τὸ A τὴν ὀρθὴν ὑπάρχειν τῷ Γ τῇ ἐν τῷ ἡμικυκλίῳ αἴτιον τὸ B· αὕτη μὲν γὰρ τῇ A ἴση, ἡ δὲ τὸ Γ τῇ B· δύο γὰρ ὀρθῶν ἡμίσεια. τοῦ B οὖν ὄντος ἡμίσεος δύο ὀρθῶν τὸ A τῷ Γ ὑπάρχει· τοῦτο δ' ἦν τὸ ἐν ἡμικυκλίῳ ὀρθὴν εἶναι.* Der hier flüchtig angedeutete Beweis des Satzes wird klar durch 1051^a 26: *διὰ τί ἐν ἡμικυκλίῳ ὀρθὴ καθόλου; διότι, ἐὰν ἴσαι τρεῖς ἥ τε βάσις δύο καὶ ἡ ἐκ μέσου ἐπισταθεῖσα ὀρθή, ἰδόντι δῆλον τῷ ἐκεῖνο εἰδότι·* Unter *ἐκεῖνο*, das Alexandros S. 596, 26 und 597, 11 mißverstanden hat, ist der Satz *ὅτι δύο ὀρθαὶ τὸ τρίγωνον* 1051^a 24 zu verstehen. Der Beweis, der vom Euklidischen ganz verschieden ist, ist dieser. Die Winkel a sind je $\frac{1}{2}$R, weil die kleinen Dreiecke rechtwinklig und gleichschenklig sind; der Winkel im Halbkreis $2a$ ist also die Hälfte der Winkelsumme $4a$ des großen Dreiecks, folglich R.

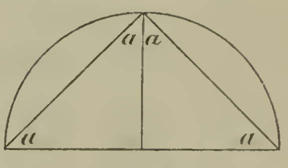


Fig. 4.

Dieser Beweis, offenbar der damals rezipierte, setzt außer I 32 auch I 5 (*τῶν ἰσοσκελῶν τριγώνων αἱ πρὸς τῇ βάσει γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν*) und III 21 (*ἐν κύκλῳ αἱ ἐν τῷ αὐτῷ τμήματι γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν*) voraus.

Mit den Hauptsätzen der Proportionslehre zeigt sich Aristoteles 376^a 10 ff. durchaus vertraut; zur Anwendung kommen stillschweigend: VI 10 (Z. 10—11), V 14 (Z. 11 und 14, aber in anderer Form; Euklid schließt aus $a:b=c:d$ und $a>c$ auf $b>d$, Aristoteles aus $a:b=c:d$ und $a>b$ auf $c>d$), VI 11 kombiniert mit V 7 coroll. (Z. 14—16), VI 12 (Z. 16—17), V 22 kombiniert mit V 16 (Z. 22—24; statt *αἱ ΔBZ* an erster Stelle Z. 24 wäre *αἱ ZBΔ* genauer), V 18 kombiniert mit V 11 (Z. 25—26); außerdem V 16: *ἔσται ἄρα, ὡς ὁ* $\bar{α}$ *ὅρος πρὸς τὸν* $\bar{β}$, *οὕτως ὁ* $\bar{γ}$ *πρὸς τὸν* $\bar{δ}$· *καὶ ἐναλλὰξ ἄρα, ὡς ὁ* $\bar{α}$ *πρὸς τὸν* $\bar{γ}$, *ὁ* $\bar{β}$ *πρὸς τὸν* $\bar{δ}$ 1131^b 5, und V 12: *ἐὰν ᾖ ὁποσαοῦν μεγέθη ἀνάλογον, ἔσται, ὡς ἓν τῶν ἡγουμένων πρὸς ἓν τῶν ἑπομένων, οὕτως ἅπαντα τὰ ἡγούμενα πρὸς ἅπαντα τὰ ἑπόμενα* in der konventionell verkürzten Fassung: *ὥστε καὶ τὸ ὅλον πρὸς τὸ ὅλον* 1131^b 7, näher erklärt ibid. 9: *ἡ ἄρα τοῦ* $\bar{α}$ *ὅρου τῷ* $\bar{γ}$ *καὶ ἡ τοῦ* $\bar{β}$ *τῷ* $\bar{δ}$ *σύζευξις*, 13: *ἐν γὰρ τῇ γεωμετρικῇ συμβαίνει καὶ τὸ ὅλον*

πρὸς τὸ ὅλον, ὅπερ ἑκάτερον πρὸς ἑκάτερον. Die Form der arithmetischen Proportion hat der Syllogismus 116^b 29 ff.

Daß Aristoteles die allgemeine Proportionslehre des Eudoxos schon kannte, haben wir oben S. 11 gesehen. Darauf bezieht sich die Bemerkung 158^b 29: *ἔοικε δὲ καὶ ἐν τοῖς μαθήμασιν ἔνια δι' ὁρισμοῦ ἔλλειψιν οὐ ῥᾳδίως γράφεσθαι, οἷον καὶ ὅτι ἡ παρὰ τὴν πλευρὰν τέμνουσα τὸ ἐπίπεδον* (d. i. ein Parallelogramm) *ὁμοίως διαιρεῖ τήν τε γραμμὴν* (die Seite) *καὶ τὸ χωρίον. τοῦ δὲ ὁρισμοῦ ῥηθέντος εὐθέως φανερὸν τὸ λεγόμενον· τὴν γὰρ αὐτὴν ἀνταναίρεσιν ἔχει τὰ χωρία καὶ αἱ γραμμαί, ἔστι δ' ὁρισμὸς τοῦ αὐτοῦ λόγου οὗτος.* Denn, so lange man die pythagoreische Definition der Proportion hatte, die nur für kommensurable Größen Geltung besaß, konnte man den angedeuteten Satz nicht exakt beweisen; das wurde erst durch die von Eudoxos gegebene allgemeine Definition ermöglicht, die bei Euklid lautet: *ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ μεγέθη λέγεται εἶναι πρῶτον πρὸς δεύτερον καὶ τρίτον πρὸς τέταρτον, ὅταν τὰ τοῦ πρώτου καὶ τρίτου ἰσάκις πολλαπλάσια τῶν τοῦ δευτέρου καὶ τετάρτου ἰσάκις πολλαπλασίων καθ' ὁποιονοῦν πολλαπλασιασμὸν ἑκάτερον ἑκατέρου ἢ ἅμα ὑπερέχῃ ἢ ἅμα ἴσα ᾖ ἢ ἅμα ἐλλείπῃ ληφθέντα κατάλληλα.* Das ist eben eine sorgfältige und exakte Umschreibung der *ἀνταναίρεσις*, und sie scheint dem Euklid selbst zu gehören, da Aristoteles ausdrücklich versichert, die Definition der Proportion (*ὁ αὐτὸς λόγος*) sei *τὴν αὐτὴν ἀνταναίρεσιν ἔχειν*; vgl. Alexandros *in Top.* S. 545, 15 ed. Wallies: *ἔστι δὲ ὁρισμὸς τῶν ἀναλόγων, ᾧ οἱ ἀρχαῖοι ἐχρῶντο, οὗτος· ἀνάλογον ἔχει μεγέθη πρὸς ἄλληλα, ὧν ἡ αὐτὴ ἀνθυφαίρεσις.* Übrigens setzt der Beweis des Aristotelischen Satzes (für Parallelogramme) nicht nur den Transversalsatz (*Elem.* VI 2) voraus, sondern auch VI 1: *τὰ τρίγωνα καὶ τὰ παραλληλόγραμμα τὰ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ὄντα πρὸς ἄλληλά ἐστιν ὡς αἱ βάσεις.* Ein spezieller Fall von diesem Satz in geänderter Form (mit Vertauschung von *ὕψος* und *βάσις*) ist 373^a 13: *ἴσαι δὴ αὗται* (sc. *αἱ κάθετοι* = *τὰ ὕψη*)*· ἐν ἴσοις γὰρ τριγώνοις* (und mit gleichen Grundlinien). Das Wort *ὕψος* in mathematischem Sinne (Euklid VI def. 4) kennt Aristoteles noch nicht.

VI 4: *τῶν ἰσογωνίων τριγώνων ἀνάλογόν εἰσιν αἱ πλευραὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας καὶ ὁμόλογοι αἱ ὑπὸ τὰς ἴσας γωνίας ὑποτείνουσαι*; VI 6: *ἐὰν δύο τρίγωνα μίαν γωνίαν μιᾷ γωνίᾳ ἴσην ἔχῃ, περὶ δὲ τὰς ἴσας γωνίας τὰς πλευρὰς ἀνάλογον, ἰσογώνια ἔσται τὰ τρίγωνα καὶ ἴσας ἕξει τὰς γωνίας, ὑφ' ἃς αἱ ὁμόλογοι πλευραὶ ὑποτείνουσιν* — 376^a 27 ff., wo die Schlußfolgerung diese ist: gegeben ist (Z. 25 bis 26) $H\Pi : \Pi P = \Pi P : K\Pi$, d. h., da $\angle H\Pi P$ den Dreiecken $HP\Pi$, $KP\Pi$ gemeinsam ist,

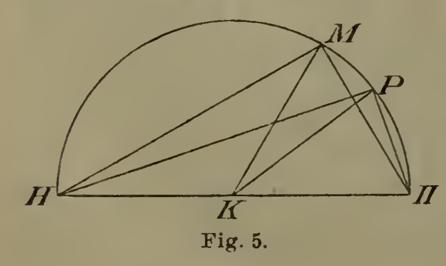


Fig. 5.

die Dreiecke sind *ἰσογώνια* und $\angle H P \Pi = P K \Pi$ (VI 6; 376ᵃ 29: *περὶ γὰρ τὴν αὐτὴν γωνίαν τὴν Π ἀνάλογον αἵ τε τοῦ ΗΠΡ τριγώνου καὶ τοῦ ΚΡΠ*); also (VI 4): $HP : KP = H\Pi : \Pi P$ (Z. 30: *ὥστε καὶ ἡ ΗΡ*[1]) *πρὸς τὴν ΚΡ τὸν αὐτὸν ἕξει λόγον καὶ ἡ ΗΠ πρὸς τὴν ΠΡ*). Mehr als dieser Satz und etwa *Elem.* VI 2 scheint auch in der unklaren Stelle 452ᵇ 17 ff. nicht enthalten zu sein; namentlich ergibt der Zusammenhang, daß Aristoteles hier keinen besonderen Satz aus den Elementen im Sinne hat, sondern nur mathematisch exemplifiziert.

IX 4: *ἐὰν κύβος ἀριθμὸς κύβον ἀριθμὸν πολλαπλασιάσας ποιῇ τινα, ὁ γενόμενος κύβος ἔσται* — 75ᵇ 12: *διὰ τοῦτο τῇ γεωμετρίᾳ οὐκ ἔστι δεῖξαι, ὅτι τῶν ἐναντίων μία ἐπιστήμη, ἀλλ' οὐδ', ὅτι οἱ δύο κύβοι κύβος, οὐδ' ἄλλῃ ἐπιστήμῃ τὸ ἑτέρας.* Der Zusammenhang ergibt, daß der Satz *δύο κύβοι κύβος* nicht geometrisch aufzufassen ist, also muß er arithmetisch sein; daher *ἀλλ' οὐδ'*: ja nicht einmal einen Satz aus der so eng verwandten Wissenschaft der Arithmetik darf die Geometrie beweisen wollen.

Die Grundlage des Exhaustionsbeweises spricht Aristoteles aus 266ᵇ 2: *πρὸς πεπερασμένον γὰρ ἀεὶ προστιθεὶς ὑπερβαλῶ παντὸς ὡρισμένου καὶ ἀφαιρῶν ἐλλείψω ὡσαύτως.* Die erstere Hälfte formuliert Archimedes in der Vorrede zur Parabelquadratur (II S. 296, 9) so: *τῶν ἀνίσων χωρίων τὰν ὑπεροχάν, ᾇ ὑπερέχει τὸ μεῖζον τοῦ ἐλάσσονος, δυνατὸν εἶμεν αὐτὰν ἑαυτᾷ συντιθεμέναν παντὸς ὑπερέχειν τοῦ προτεθέντος πεπερασμένου χωρίου*; die letztere Hälfte in engerer Fassung Euklid X 1: *δύο μεγεθῶν ἀνίσων ἐκκειμένων, ἐὰν ἀπὸ τοῦ μείζονος ἀφαιρεθῇ μεῖζον ἢ τὸ ἥμισυ καὶ τοῦ καταλειπομένου μεῖζον ἢ τὸ ἥμισυ, καὶ τοῦτο ἀεὶ γίγνηται, λειφθήσεταί τι μέγεθος, ὃ ἔσται ἔλασσον τοῦ ἐκκειμένου ἐλάσσονος μεγέθους*; mit dem Corollar dieses Satzes (*Euclidis opp.* III S. 6, 9): *ὁμοίως δὲ δειχθήσεται, κἂν ἡμίση ᾖ τὰ ἀφαιρούμενα* ist zu vergleichen Aristoteles 207ᵇ 10: *ἐπὶ δὲ τὸ πλεῖον ἀεὶ ἔστι νοῆσαι· ἄπειροι γὰρ αἱ διχοτομίαι τοῦ μεγέθους*; 203ᵇ 17: *ἐκ τῆς ἐν τοῖς μεγέθεσι διαιρέσεως· χρῶνται γὰρ καὶ οἱ μαθηματικοὶ τῷ ἀπείρῳ* (vgl. 204ᵃ 34: *ἴσως αὕτη μέν ἐστι καθόλου ἡ ζήτησις μᾶλλον, εἰ ἐνδέχεται τὸ ἄπειρον καὶ ἐν τοῖς μαθηματικοῖς εἶναι καὶ ἐν τοῖς νοητοῖς*). Von hier aus widerlegt er die Annahme von *ἄτομοι γραμμαί*, s. 206ᵃ 16: *τὸ δὲ μέγεθος ὅτι μὲν κατ' ἐνέργειαν οὐκ ἔστιν ἄπειρον, εἴρηται, διαιρέσει δ' ἐστίν· οὐ γὰρ χαλεπὸν ἀνελεῖν τὰς ἀτόμους γραμμάς*; 233ᵇ 15: *φανερὸν οὖν ἐκ τῶν εἰρημένων, ὡς οὔτε γραμμὴ οὔτε ἐπίπεδον οὔτε ὅλως τῶν συνεχῶν οὐθὲν ἔσται ἄτομον κτλ.*; 237ᵇ 8: *ἐπ' ἄπειρον γὰρ ἡ διαίρεσις, καθάπερ ἐπὶ τῶν αὐξανομένων καὶ καθαιρουμένων γραμμῶν*; 271ᵇ 9: *οἷον εἴ τις ἐλάχιστον εἶναί τι φαίη μέγεθος·*

---

1) So ist zu lesen. Eine Hs. hat *καὶ ἡ Ρ*, die übrigen sinnlos *καὶ ἡ ΠΡ*. Alexandros u. a. haben das Richtige, s. Ideler, *Meteorol.* II S. 310.

οὗτος γὰρ τοὐλάχιστον εἰσαγαγὼν τὰ μέγιστ' ἂν κινήσειε τῶν μαθηματικῶν (vgl. 303ª 20); 220ª 30: *ἀεὶ γὰρ διαιρεῖται πᾶσα γραμμή*; vgl. noch 121ᵇ 19, 299ª 12, 994ᵇ 24, 1085ᵇ 34. Damit wendet er sich nicht nur gegen Xenokrates wie das jüngere Schriftchen *περὶ ἀτόμων γραμμῶν*, sondern auch gegen Platon, s. 992ª 21 ff., Alexandros *in Metaphys.* S. 120, 6 ff. ed. Hayduck

Daß Seite und Diagonal des Quadrats inkommensurabel sind, bei Euklid in dem allgemeineren Satz X 9 mit enthalten, ist das zweite (s. oben S. 19) Lieblingsbeispiel des Aristoteles, s. 71ᵇ 25: *οὐκ ἔστι τὸ μὴ ὂν ἐπίστασθαι, οἷον ὅτι ἡ διάμετρος σύμμετρος*; 222ª 4: *οἷον τὸ ἀσύμμετρον εἶναι τὴν διάμετρον ἀεί ἐστι*; 742ᵇ 27: *τὸ τὴν διάμετρον ἀσύμμετρον εἶναι πρὸς τὴν πλευρὰν ἀίδιον* (sonst immer ohne den Zusatz *πρὸς τὴν πλευράν*, s. 46ᵇ 29, 65ᵇ 17, 281ª 6, ᵇ 5, 430ª 31, 983ª 15, 1012ª 32, 1017ª 35, 1019ᵇ 24, 1024ᵇ 19, 1047ᵇ 6, 1051ᵇ 20, 1392ª 18). Der Beweis wird angedeutet 41ª 24: *τὸ δ' ἐξ ἀρχῆς ἐξ ὑποθέσεως δεικνύουσιν, ὅταν ἀδύνατόν τι συμβαίνῃ τῆς ἀντιφάσεως τεθείσης, οἷον ὅτι ἀσύμμετρος ἡ διάμετρος διὰ τὸ γίνεσθαι τὰ περιττὰ ἴσα τοῖς ἀρτίοις συμμέτρου τεθείσης*; 50ª 37: *οἷον τεθείσης τῆς διαμέτρου συμμέτρου τὸ τὰ περιττὰ ἴσα εἶναι τοῖς ἀρτίοις.* Und eben dieser Beweis ist, wie Hankel S. 102 hervorgehoben hat, in einer Interpolation bei Euklid erhalten (*Elem.* III S. 408 app. nr. 27). Wenn dieser alte pythagoreische Beweis noch zu Aristoteles' Zeit einen festen Bestand der mathematischen Lehrbücher bildete, können diese für die systematische und umfassende Behandlung der Irrationalen nichts Wesentliches getan haben. Im einzelnen war dieser Gegenstand außer von Theaitetos auch von Eudoxos (Proklos S. 67, 6) und Hermotimos (ib. S. 67, 21 bis 22) gefördert worden; aber das klare und erschöpfende System des X. Buchs der *Elemente* bleibt eine persönliche Leistung Euklids (vgl. *Studien über Euklid* S. 34).

Aus der Stereometrie ist äußerst wenig nachweisbar.

Der Satz, daß die Senkrechten auf dieselbe Gerade in demselben Punkte in einer Ebene liegen (373ª 14: *καὶ ἐν ἑνὶ ἐπιπέδῳ πᾶσαι· πρὸς ὀρθὰς γὰρ πᾶσαι τῇ ΑΕΒ καὶ ἐφ' ἓν σημεῖον τὸ Ε συνάπτουσιν*, vgl. Euklid XI 5: *ἐὰν εὐθεῖα τρισὶν εὐθείαις ἁπτομέναις ἀλλήλων πρὸς ὀρθὰς ἐπὶ τῆς κοινῆς τομῆς ἐπισταθῇ, αἱ τρεῖς εὐθεῖαι ἐν ἑνί εἰσιν ἐπιπέδῳ*), setzt zwar eine Definition der Senkrechten auf die Ebene (wie *Elem.* XI def. 3) voraus oder wenigstens ein klares Verständnis der Sache, aber auch nicht mehr. Und daß ein Schnitt durch das Zentrum einer Kugel einen größten Kreis erzeugt (375ᵇ 32: *κύκλος οὖν ἡ τομὴ ἔσται τῆς σφαίρας ὁ μέγιστος*, vgl. *Elem.* XII 17 S. 228, 17 ff.), hatte die Astronomie ohne Zweifel längst als selbstverständlich angenommen. Ebendaher stammt wohl auch, was von der Teilung der Kugel gesagt wird 286ᵇ 28: *μόνην γὰρ τῶν στερεῶν οὐ διαιροῦσι* (Platon

und seine Schule) *τὴν σφαῖραν ὡς οὐκ ἔχουσαν πλείους ἐπιφανείας ἢ μίαν· ἡ γὰρ εἰς τὰ ἐπίπεδα διαίρεσις οὐχ, ὡς ἂν τέμνων τις εἰς τὰ μέρη διέλοι τὸ ὅλον, τοῦτον διαιρεῖται τὸν τρόπον, ἀλλ' ὡς εἰς ἕτερα τῷ εἴδει.* Die Bemerkung endlich 306ᵇ 5: *ἐν μὲν γὰρ τοῖς ἐπιπέδοις τρία σχήματα δοκεῖ συμπληροῦν τὸν τόπον, τρίγωνον καὶ τετράγωνον καὶ ἑξάγωνον, ἐν δὲ τοῖς στερεοῖς δύο μόνα, πυραμὶς καὶ κύβος* ist in ihrem ersteren, nicht stereometrischen Teil der pythagoreischen Mathematik entlehnt (Proklos *in Elem.* S. 304, 14: *κἀκείνῳ τῷ παραδόξῳ θεωρήματι τῷ δεικνύντι μόνα τρία ταῦτα πολύγωνα πληροῦν δυνάμενα τὸν περὶ ἓν σημεῖον ὅλον τόπον τὸ ἰσόπλευρον τρίγωνον καὶ τὸ τετράγωνον καὶ τὸ ἑξάγωνον τὸ ἰσόπλευρον καὶ ἰσογώνιον κτλ.*, S. 305, 3: *καί ἐστι τὸ θεώρημα τοῦτο Πυθαγόρειον*), im stereometrischen Teil (= Euklid XIII S. 336, 24—26; 338, 5—6) aus der Beschäftigung mit den platonischen Körpern entstanden, wie es sich aus dem Zusammenhang ergibt; die Bemerkung ist gegen Platon gerichtet (306ᵃ 3).

Von einem Lehrgebäude der Stereometrie gibt es also bei Aristoteles keine Spur.

Abweichungen von der Euklidischen Fassung der Sätze und Beweise haben wir gelegentlich schon mehrfach festgestellt. Bei weitem aber die wichtigsten Aufschlüsse über solche gibt die Stelle 41ᵇ 14: *οἷον ὅτι τοῦ ἰσοσκελοῦς ἴσαι αἱ πρὸς τῇ βάσει. ἔστωσαν εἰς τὸ κέντρον ἠγμέναι αἱ Α, Β. εἰ οὖν ἴσην λαμβάνοι τὴν Α, Γ γωνίαν τῇ Β, Δ μὴ ὅλως ἀξιώσας ἴσας τὰς τῶν ἡμικυκλίων καὶ πάλιν τὴν Γ τῇ Δ μὴ πᾶσαν προσλαβὼν τὴν τοῦ τμήματος, ἔτι δ' ἀπ' ἴσων οὐσῶν τῶν ὅλων γωνιῶν καὶ ἴσων ἀφῃρημένων ἴσας εἶναι τὰς λοιπὰς τὰς Ε, Ζ κτλ.* Also[1]): $\angle A + \Gamma = B + \Delta$, weil die Winkel der Halbkreise gleich sind, $\angle \Gamma = \Delta$, weil die (gemischten) Winkel eines Segments gleich sind, folglich $\angle E = Z$.

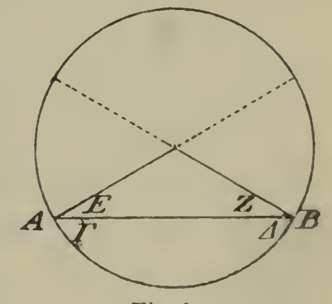


Fig. 6.

Dieser Beweis, der von dem Euklidischen (I 5) gänzlich verschieden ist, operiert also wesentlich mit gemischten Winkeln. Diese kommen in den Elementen Euklids nur III 16 und 31 vor, werden aber nicht nur bei der Definition des Winkels (I def. 8: *ἐπίπεδος δὲ γωνία ἐστὶν ἡ ἐν ἐπιπέδῳ δύο γραμμῶν ἁπτομένων ἀλλήλων καὶ μὴ ἐπ' εὐθείας κειμένων πρὸς ἀλλήλας τῶν γραμμῶν κλίσις*; def. 9: *ὅταν δὲ αἱ περιέχουσαι τὴν γωνίαν γραμμαὶ εὐθεῖαι ὦσιν, εὐθύγραμμος καλεῖται ἡ γωνία*) berücksichtigt, sondern

---

1) Die Stelle ist nicht nur von Zell, sondern auch von Waitz (*Aristotelis Organon* I S. 434 ff.) mißverstanden; das richtige haben Johannes Philoponos und, von einiger Unklarheit abgesehen, Alexandros S. 268 ed. Wallies, s. *Oversigt over Vidensk. Selskabs Forh.* 1888 S. 1 ff. Richtig auch Jul. Pacius und Blancanus S. 38.

auch bei den Kreissegmenten, s. III def. 7: *τμήματος δὲ γωνία ἐστὶν ἡ περιεχομένη ὑπό τε εὐθείας καὶ κύκλου περιφερείας* (aber III def. 8: *ἐν τμήματι δὲ γωνία ἐστίν, ὅταν* usw.). Daß Euklid hier nur den Sprachgebrauch seiner Vorgänger befolgt, wird durch Aristoteles bestätigt, der 41ᵇ 17 bis 18 *αἱ τῶν ἡμικυκλίων (γωνίαι)* und *ἡ τοῦ τμήματος (γωνία)* im Sinne der Euklidischen Definition sagt. Überhaupt sind die gemischten Winkel bei Euklid nicht anzuzweifeln (vgl. *Euclidis opp.* V S. LXXXVIII) als Rudimente älterer Zustände; die Stelle aus Aristoteles beweist, daß sie in den voreuklidischen Lehrbüchern eine bedeutende Rolle spielten, und daß wenigstens folgende zwei Sätze über sie ganz am Anfang des Systems aufgeführt waren: in allen Halbkreisen sind die gemischten Winkel gleich, und: die gemischten Winkel eines Segments sind gleich. Erwähnt sind sie noch bei Aristoteles 375ᵇ 24: *ἐπὶ τὴν μείζω γωνίαν*; denn darunter ist der gemischte Winkel zwischen Sehestrahl und Kreisbogen gemeint. Von Nutzen waren sie, wie letztere Stelle zeigt, in der Katoptrik (und Astronomie), und deshalb hat wohl Euklid sie nicht ganz gestrichen. Der Satz von den Winkeln der Halbkreise kommt in der pseudoeuklidischen Katoptrik vor prop. 5 S. 294, 17: *ἴσαι ἄρα εἰσὶν αἱ πρὸς τοῖς σημείοις τοῖς Α, Δ, Γ γωνίαι· ἡμικυκλίου γάρ*; vgl. 24 S. 326, 12—13.

Die Stelle 41ᵇ 14 ist in Form und Terminologie ganz euklidisch (*ἰσοσκελές, αἱ πρὸς τῇ βάσει*); selbst die sonderbare Bezeichnung der Durchmesser als *αἱ Α, Β* (ebenso 452ᵇ 19: *ἡ τὸ Θ πρὸς τὴν Μ*) findet bei Euklid wenigstens eine Parallele (s. *Elem.* I S. 281 not.). Nur für *ἔστωσαν εἰς τὸ κέντρον ἠγμέναι* würde Euklid *ἐπεζεύχθωσαν ἐπὶ τὸ κέντρον* gesagt haben (vgl. 363ᵇ 6—7). Von der Bezeichnung der Winkel durch Buchstaben war schon oben die Rede; hier ist nur zu bemerken, daß Aristoteles dieselben Winkel bald durch *Ε, Ζ*, bald ungenau durch *Α, Β* bezeichnet.

Von Sätzen, die bei Euklid gar nicht vorkommen, hat Aristoteles noch folgende:

Die Außenwinkel eines Polygons sind gleich 4R, 85ᵇ 38: *ὅταν μὲν οὖν γινώσκωμεν, ὅτι τέτταρσιν αἱ ἔξω ἴσαι, ὅτι ἰσοσκελές, ἔτι λείπεται, διὰ τί τὸ ἰσοσκελές, ὅτι τρίγωνον, καὶ τοῦτο, ὅτι σχῆμα εὐθύγραμμον*; 99ᵃ 19: *οἷον τὸ τέτταρσιν ἴσας τὰς ἔξω ἐπὶ πλέον ἢ τρίγωνον ἢ τετράγωνον, ἅπασι δὲ ἐπ' ἴσον.* Simplikios zur Physik 200ᵃ 15 (I S. 390, 33 ed. Diels: *ἰστέον, ὅτι δέδεικται παντὸς εὐθυγράμμου τὰς ἐκτὸς πάσας γωνίας τέτρασιν ὀρθαῖς ἴσας εἶναι*) führt den Satz an ohne Veranlassung der betreffenden Aristotelesstelle (s. oben S. 19). Proklos *in Elem.* S. 383, 1—16 setzt die Sache ausführlich auseinander.

376ᵃ 1: *αἱ οὖν ἀπὸ τῶν Η, Κ ἀναγόμεναι γραμμαὶ ἐν τούτῳ τῷ λόγῳ*

οὐ συσταθήσονται τοῦ ἐφ' ᾧ *Α* ἡμικυκλίου πρὸς ἄλλο καὶ ἄλλο σημεῖον; [a] 7: πρὸς ἄλλῃ δὲ ᾗ πρὸς τῇ *MN* περιφερείᾳ[1]) ἀπὸ τῶν αὐτῶν σημείων ὁ αὐτὸς λόγος ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ οὐ συνίσταται; [b] 1: ὥστ' ἀπὸ τῶν *H*, *K* σημείων οὐ μόνον πρὸς τῇ *MN* περιφερείᾳ συσταθήσονται τὸν αὐτὸν ἔχουσαι λόγον, ἀλλὰ καὶ ἄλλοθι· ὅπερ ἀδύνατον; [b] 10: εἰ δὲ μή, ὁμοίως δειχθήσονται τὸν αὐτὸν ἔχουσαι λόγον αἱ ἄλλοθι καὶ ἄλλοθι τοῦ ἡμικυκλίου συνιστάμεναι· ὅπερ ἦν ἀδύνατον. D. h. es kann nicht sein $HM : MK = HA : AK$, wie Olympiodoros S. 246 ed. Stüve[2]) und Alexandros (S. 165 ed. Hayduck) richtig erklären und durch Euklid III 7 beweisen. Die Form des Satzes klingt an *Elem.* I 7 an: ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας δύο ταῖς αὐταῖς εὐθείαις ἄλλαι δύο εὐθεῖαι ἴσαι ἑκατέρα ἑκατέρᾳ οὐ συσταθήσονται πρὸς ἄλλῳ καὶ ἄλλῳ σημείῳ κτλ.

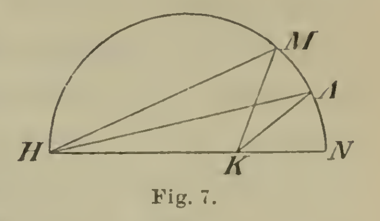


Fig. 7.

287[a] 27: ἀλλὰ μὴν τῶν ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ ἐπὶ τὸ αὐτὸ (geschlossene Linien) ἐλαχίστη ἐστὶν ἡ τοῦ κύκλου γραμμή (nämlich bei demselben Flächenraum) setzt Untersuchungen über Isoperimetrie voraus, wie sie für uns erst bei Zenodoros und Pappos (V S. 308 ff.) vorliegen, für Kreis und Kugel aber den Pythagoreern besonders nahe lagen.

In 271[a] 13: ἀεὶ γὰρ ἕκαστον ἀπέχειν τὴν εὐθεῖαν τίθεμεν könnte man versucht sein, das von Archimedes (*De sphaera et cyl.* I S. 8, 23) formulierte Axiom: τῶν τὰ αὐτὰ πέρατα ἐχουσῶν γραμμῶν ἐλαχίστην εἶναι τὴν εὐθεῖαν suchen zu wollen, das Proklos *in Elem.* S. 109, 8 ff. vergeblich in die Euklidische Definition der Geraden hinein zu interpretieren versucht. Es ist aber eigentlich nur eine Definition des ἀπέχειν, entsprechend der Euklidischen III def. 4 für Geraden in dem Kreise.

Daß Aristoteles auch die Formulierung der Sätze der στοιχεῖα als δεδομένα kennt, kann nicht wundernehmen, da diese Fassung mit der analytischen Methode eng verknüpft ist (*Studien über Euklid* S. 39 ff.). Zur Anwendung kommen folgende Sätze:

Data 26: ἐὰν εὐθείας γραμμῆς τὰ πέρατα ᾖ δεδομένα τῇ θέσει, δέδοται ἡ εὐθεῖα τῇ θέσει καὶ τῷ μεγέθει — 376[a] 3: ἐπεὶ γὰρ τά τε *H*, *K* σημεῖα

---

1) ἄλλῃ δὲ τῇ πρὸς τῇ *MN* περιφερείᾳ Bekker mit den Hss., πρὸς ἄλλο δέ γε τῆς *MN* περιφερείας Ideler mit einigen alten Ausgaben, und so hat Alexandros S. 167, 6—7 es paraphrasiert (πρὸς ἄλλῳ σημείῳ τῆς *MN* περιφερείας). Aber 376[b] 2 beweist, daß πρὸς τῇ *MN* περιφερείᾳ bedeutet: so daß ein Bogen *MN* abgeschnitten wird.

2) Nach *AK* S. 246, 6 fehlt etwa: εἰ γὰρ δυνατόν, συσταθήτωσαν ὡς αἱ *HM*, *MK* (nach dem Wortlaut des Aristoteles wären *M* und *A* durchgehend zu vertauschen mit Ideler). ἐν γὰρ τῇ *HK* ἐστίν S. 246, 11 ist unbegreiflich.

δέδοται καὶ ἡ ΚΗ, δεδομένη[1]) *ἂν εἴη καὶ ἡ ΜΗ*, nach Alexandros S. 166,17 weil *HK*, *KM* und ∠ *HKM* gegeben sind, ein Satz, der bei Euklid nicht steht (s. Figur 7, nur ist *K* Zentrum).

Data 1: *τῶν δεδομένων μεγεθῶν ὁ λόγος ὁ πρὸς ἄλληλα δέδοται* — 376ᵃ 5: *ὥστε καὶ ὁ λόγος τῆς ΜΗ πρὸς τὴν ΜΚ* (denn *MK* ist gegeben, weil = *HK*).

376ᵃ 5: *δεδομένης οὖν περιφερείας ἐφάψεται τὸ Μ* (nicht bei Euklid), d. h. wenn *MH* : *MK* gegeben ist, ist der Kreisbogen durch *M* (dessen Zentrum auf *HK* liegt) gegeben.

376ᵃ 7: *ὥστε ἡ τομὴ τῶν περιφερειῶν δέδοται* (nämlich des der Lage nach gegebenen Kreisbogens *HMN* und des ebenfalls der Lage nach gegebenen Regenbogens) — Data 25: *ἐὰν δύο γραμμαὶ τῇ θέσει δεδομέναι τέμνωσιν ἀλλήλας, δέδοται τὸ σημεῖον, καθ' ὃ τέμνουσιν ἀλλήλας, τῇ θέσει.*

Noch bleibt ein Punkt zu erörtern. Aristoteles spricht öfters von mathematischen Trugschlüssen. Solche, wie die rein sophistische Kreisquadratur Brysons oder die auf einem wirklichen Fehlschluß beruhenden des Antiphon und Hippokrates, hat er natürlich aus den Schriften dieser Männer geschöpft, und solche unfreiwillige *παραλογισμοί* sind gemeint 132ᵃ 32: *ἀπατᾶται γὰρ ὁ γεωμετρικὸς ἐν τῷ ψευδογραφεῖσθαι*, vgl. 160ᵇ 36, 161ᵃ 34, 170ᵃ 32. Aber 157ᵃ 1: *ἔτι τὸ μηκύνειν καὶ παρεμβάλλειν τὰ μηδὲν χρήσιμα πρὸς τὸν λόγον, καθάπερ οἱ ψευδογραφοῦντες* ist von böswilligen Trugschlüssen die Rede, und 101ᵃ 6 ff. (*οἱ ἐκ τῶν περί τινας ἐπιστήμας οἰκείων γινόμενοι παραλογισμοί, καθάπερ ἐπὶ τῆς γεωμετρίας καὶ τῶν ταύτῃ συγγενῶν συμβέβηκεν ἔχειν* ... *ἐκ τῶν οἰκείων μὲν τῇ ἐπιστήμῃ λημμάτων, οὐκ ἀληθῶν δέ, τὸν συλλογισμὸν ποιεῖται· τῷ γὰρ ἢ τὰ ἡμικύκλια περιγράφειν μὴ ὡς δεῖ ἢ γραμμάς τινας ἄγειν μὴ ὡς ἂν ἀχθείησαν τὸν παραλογισμὸν ποιεῖται*) werden Beispiele angeführt, die in der unten gedruckten byzantinischen Abhandlung nach Alexandros *in Topica* S. 23 ff. ganz ansprechend erläutert werden; ähnliche sophistische *ἐνστάσεις* gegen Euklid I 12 führt Proklos *in Elem.* S. 286, 13 ff. an. Es liegt nahe, bei den *ψευδογραφοῦντες* des Aristoteles an die Angriffe des Protagoras auf die Mathematik zu denken (998ᵃ 3: *ὥσπερ Πρωταγόρας ἔλεγεν ἐλέγχων τοὺς γεωμέτρας*, Zeller⁵ I² S. 1109).

Bekanntlich hat Euklid gegen solche Trugschlüsse eine besondere Schrift geschrieben, die *Ψευδάρια* (*Studien über Euklid* S. 38), wahrscheinlich nach dem Vorbild der *σοφιστικοὶ ἔλεγχοι* des Aristoteles, der 160ᵇ 33 ff. den Gedanken an eine solche Arbeit nahe legt (*λέλυκε μὲν οὖν πάντως ὁ ἀνελών, παρ' ὃ γίνεται τὸ ψεῦδος, οἶδε δὲ τὴν λύσιν ὁ εἰδώς, ὅτι παρὰ τοῦτο*

1) Vor *δεδομένη* ist ein Komma zu setzen.

ὁ λόγος, καθάπερ ἐπὶ τῶν ψευδογραφουμένων· οὐ γὰρ ἀπόχρη τὸ ἐνστῆναι, οὐδ' ἂν ψεῦδος ᾖ τὸ ἀναιρούμενον, ἀλλὰ καί, διότι ψεῦδος, ἀποδεικτέον).

II.

Bei der bisherigen Untersuchung sind nur unzweifelhaft echte Schriften des Aristoteles berücksichtigt. Der Vollständigkeit halber will ich noch kurz die mathematischen Stellen der übrigen Bestandteile des *corpus Aristotelicum* besprechen.

In den beiden späteren Bearbeitungen *der Ethik,* der *μεγάλα ἠθικά* und der Eudemischen, die wohl noch voreuklidisch sind, ist der Befund ungefähr der bisherige. Die Geometrie dient als Beispiel des Verhältnisses der *ἀρχαί* 1187ª 35: *ἐναργέστερον δ' ἔστι κατιδεῖν τοῦτο ἐν τοῖς κατὰ γεωμετρίαν· καὶ γὰρ ἐκεῖ, ἐπειδή τινες λαμβάνονται ἀρχαί, ὡς ἂν αἱ ἀρχαὶ ἔχωσιν, οὕτω καὶ τὰ μετὰ τὰς ἀρχάς.* Lieblingsbeispiel ist auch hier *Elem.* I 32: *τὸ τρίγωνον δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας ἔχον* 1183ᵇ 2, 1187ª 38, 1189ᵇ 11, auch in der Form *τὸ δύο ὀρθὰς ἔχειν τὸ τρίγωνον* 1222ᵇ 32 ff. und *εἴ ἐστι τὸ τρίγωνον δύο ὀρθαί* 1227ᵇ 31. Damit ist öfters der Satz verbunden, daß die Winkelsumme des *τετράγωνον* (des Vierecks) 4R ist (vgl. Euklid I 34, Proklos S. 382), und zwar als Folge von I 32: *ἐν μὲν γὰρ γεωμετρίᾳ, ὅταν φῇ τὸ τετράγωνον τέτταρσιν ὀρθαῖς ἴσας ἔχειν καὶ ἐρωτᾷ διὰ τί, ὅτι, φησί, καὶ τὸ τρίγωνον δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας ἔχει* 1189ᵇ 9; *εἰ γὰρ ἔχοντος τοῦ τριγώνου δύο ὀρθὰς ἀνάγκη τὸ τετράγωνον ἔχειν τέτταρας ὀρθάς, φανερόν, ὡς αἴτιον τούτου τὸ δύο ὀρθὰς ἔχειν τὸ τρίγωνον. εἰ δέ γε μεταβάλλοι τὸ τρίγωνον, ἀνάγκη καὶ τὸ τετράγωνον μεταβάλλειν, οἷον, εἰ τρεῖς, ἕξ, εἰ δὲ τέτταρες, ὀκτώ* 1222ᵇ 31, vgl. 1187ª 38. Auch das Beispiel *πολλὰ καὶ τῶν οὐκ ὄντων ἐφ' ἡμῖν, οἷον τὴν διάμετρον. σύμμετρον* kommt vor 1226ª 3.

Euklid III 1: *τοῦ δοθέντος κύκλου τὸ κέντρον εὑρεῖν* wird angeführt 1186ᵇ 37: *κύκλον μὲν γράψαι παντός ἐστι, τὸ δὲ μέσον τὸ ἐν αὐτῷ ἤδη λαβεῖν χαλεπόν.*

Euklid VII def. 19: *τετράγωνος ἀριθμός ἐστιν ὁ ἰσάκις ἴσος ἢ ὁ ὑπὸ δύο ἴσων ἀριθμῶν περιεχόμενος* — 1182ª 14: *οὐ γάρ ἐστιν ἡ δικαιοσύνη ἀριθμὸς ἰσάκις ἴσος* (gegen die Pythagoreer), woraus folgt, daß die erstere Fassung der Definition bei Euklid die alte der Pythagoreer ist, die zweite wohl seine eigene.

Bloße Wiederholung aus der Nikomacheischen Ethik ist 1193ᵇ 37: *τὸ δ' ἀνάλογον ἐν τέτταρσι γίνεται ἐλαχίστοις· ὡς γὰρ τὸ Α πρὸς τὸ Β, τὸ Γ πρὸς τὸ Δ,* und die stillschweigende Anwendung von *Elem.* V 16 (*ἐναλλάξ*) 1194ª 4—6. Dagegen bezeichnet die Eudemische Ethik 1226ª 28 (*διὸ οὐ βουλευόμεθα περὶ τῶν ἐν Ἰνδοῖς οὐδέ, πῶς ἂν ὁ κύκλος τετραγωνισθείη· τὰ*

μὲν γὰρ οὐκ ἐφ' ἡμῖν, τὸ δ' ὅλως οὐ πρακτόν) die Kreisquadratur geradezu als eine Unmöglichkeit, im Gegensatz zu 7[b] 31.

Die *Mechanik* bietet nicht viel Material an vorausgesetzten elementaren Sätzen. 848[b] 19: *ὅμοιον ἄρα ἐστὶ τῷ λόγῳ τὸ μικρὸν τετράπλευρον τῷ μείζονι, ὥστε καὶ ἡ αὐτὴ διάμετρος αὐτῶν* setzt als Umkehrung *Elem.* VI 24 voraus, 851[a] 23: *ἐλάττων γὰρ ἡ ΒΖ τῆς ΑΔ, ὥστε καὶ ἡ ΘΖ τῆς ΔΘ· ὅμοια γὰρ τὰ τρίγωνα* *Elem.* VI 4 und V 14, 849[b] 14: *ἔστι δέ, ὡς τὸ ΗΚ πρὸς τὸ ΚΒ, τὸ ΘΖ πρὸς τὸ ΖΧ. φανερὸν δέ, ἐὰν ἐπιζευχθῶσιν ἀπὸ τῶν Β, Χ ἐπὶ τὰ Η, Θ* wiederum *Elem.* VI 4. In der sehr unklaren Stelle 856[b] 20 ff. wird *Elem.* I 5 mit I 32 kombiniert verwendet Z. 24: *καὶ ἡ μὲν Β ἐστιν ἡμίσεια ὀρθῆς· ἡ γὰρ ΖΒ ἴση τῇ ΖΑ καὶ γωνία [δὲ] ἡ κατὰ τὸ Ζ ὀρθή*; *Elem.* I 34 wird angewandt Z. 20: *ἡ μὲν γὰρ ΑΒ τῇ ΕΘ ἴση· ἴσαι γάρ εἰσιν αἱ πλευραὶ τοῦ ΒΗΚΑ χωρίου*, und Z. 28: *ταύτῃ δὲ ἡ ΚΘ* (sc. *ἴση*)*· παράλληλος γάρ*; *Elem.* I 29 wahrscheinlich Z. 23: *ἡ γὰρ Β γωνία ἴση τῇ Η· ἐν ἴσοις γὰρ ἡ μὲν ἐκτός, ἡ δὲ ἐντός*; denn statt *ἴσοις* muß mit einer Hs. *παραλλήλοις* gelesen werden. Z. 26: *ἡ γὰρ κατὰ τὸ Β* (so zu schreiben statt Z) *ὀρθή, ἐπειδὴ διπλασιόπλευρον τὸ ἑτερόμηκες καὶ πρὸς μέσον κέκλασται* benutzt die *κεκλασμένη εὐθεῖα* in einer so speziellen Weise, daß ein eigener Satz von diesem Inhalt kaum angenommen werden kann. 849[a] 31 wird *Elem.* I 12, 849[a] 33 *Elem.* I 31 benutzt.

Gemischte Winkel werden erwähnt 857[b] 25: *διὸ καὶ φέρεται* (die Senkrechte) *πρὸς ὁμοίας γωνίας τῇ περιφερείᾳ τῆς γῆς· οὐ γὰρ ὅτι καὶ πρὸς ὀρθὴν ἔσται τῷ ἐπιπέδῳ.*

Über Kreise kommen einige spezielle Sätze vor, die aber nicht den Anschein haben, aus den mathematischen Lehrbüchern entnommen zu sein; sie scheinen eher für den Fall gebildet zu sein; so 849[a] 34: *αἱ δὴ ἐφ' ὧν ΩΥ καὶ ΘΖ ἴσαι· ἡ ἄρα ΒΥ ἐλάττων τῆς ΧΖ· αἱ γὰρ ἴσαι εὐθεῖαι ἐπ' ἀνίσους κύκλους ἐμβληθεῖσαι πρὸς ὀρθὰς τῇ διαμέτρῳ ἔλαττον τμῆμα ἀποτέμνουσι τῆς διαμέτρου ἐν τοῖς μείζοσι κύκλοις*; 851[b] 38: *διὰ τὸ ῥοπήν τινα ἔχειν τὴν γωνίαν τὴν τοῦ μείζονος κύκλου πρὸς τὴν τοῦ ἐλάττονος καὶ εἶναι, ὅπερ ἡ διάμετρος πρὸς τὴν διάμετρον* scheint den Satz zu enthalten, daß ähnliche Kreisbogen sich wie die Durchmesser verhalten (sofern man nämlich *ἡ γωνία τοῦ κύκλου* als Zentriwinkel der ähnlichen Sektoren auffaßt); 855[a] 30: *χωρὶς δὲ ἐκκυλιόμενοι* (die ungleichen Kreise), *ὥσπερ τὸ μέγεθος αὐτῶν πρὸς τὸ μέγεθος ἔχει, οὕτως καὶ αἱ γραμμαὶ αὐτῶν γίνονται πρὸς ἀλλήλας* enthält, wenn man *ὥσπερ ... ἔχει, οὕτως* von einer Proportion in streng mathematischem Sinne versteht, eine Unrichtigkeit; die Peripherien verhalten sich ja nicht wie die Kreisflächen (*Elem.* XII 2). 851[a] 13: *διὰ τὸ τὴν ἴσην γωνίαν ἐπὶ μείζονα καθῆσθαι καὶ ὅσῳ*

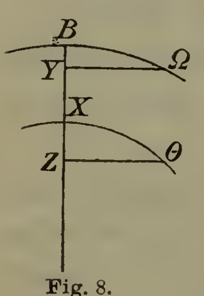


Fig. 8.

ἂν μείζους ὦσιν αἱ περιέχουσαι besagt nur, daß, je länger die Beine eines Winkels werden, desto größer wird der Kreisbogen oder die Gerade zwischen den Endpunkten; ein solcher Satz hat schwerlich in einem mathematischen Lehrbuch gestanden.

Viel interessanter ist die Mechanik in bezug auf die Terminologie. Gegen aristotelischen Ursprung der Schrift spricht nur *τετράπλευρον* 848ᵇ 20 (s. oben S. 15). *ῥόμβος* (854ᵇ 16, 855ᵃ 5), das ebensowenig bei Aristoteles vorkommt, hat Euklid nur I def. 22, also aus älteren Lehrbüchern herübergenommen. *ἑτερόμηκες* kommt hier wie bei Aristoteles und Euklid vor 849ᵃ 25, 856ᵇ 27, an letzterer Stelle mit dem Beiwort *διπλασιόπλευρον* (vgl. 856ᵃ 39, ᵇ 4). *χωρίον* 856ᵇ 22 vom Parallelogramm ist ebenfalls euklidisch, und zwar gerade in dieser Verbindung (*Elem.* I 34). Überhaupt ist die Übereinstimmung mit der Euklidischen Terminologie etwas ausgedehnter, als bei Aristoteles selbst nachweisbar ist. Es findet sich nicht nur wie bei ihm *ἐπιζευχθῶσιν ἀπὸ — ἐπί* 849ᵇ 16, *κύκλον γράφειν* 848ᵇ 8, 10, 35; 849ᵃ 11, 15, 21, 26; 850ᵇ 4; 852ᵇ 34, *λόγον ἔχειν* 848ᵇ 19, *λόγος ὃν ἔχει* 848ᵇ 14, 17; 849ᵃ 4, *κάθετος ἀπὸ — ἐπὶ* 849ᵃ 32, 34, ᵇ 14, *πρὸς ὀρθάς* 849ᵃ 36, *τὸν αὐτὸν δὴ τρόπον δειχθήσεται* 848ᵇ 21, *ὁμοίως δὲ δειχθήσεται* 854ᵇ 35; sondern auch folgende Euklidische Termini: *ἐκβεβλήσθωσαν* (verlängern) 849ᵃ 23, 850ᵃ 11, 854ᵇ 28, *ἐπ' εὐθείας* 848ᵇ 11, *πλέον ἀπέχειν τοῦ κέντρου* 849ᵇ 20 usw. (*ἐκ τοῦ κέντρου*? 850ᵇ 4), *ἡ ἐκ τοῦ κέντρου* 849ᵃ 10, 852ᵃ 17, 21, ᵇ 8, 21, 33, *ἤχθω παρά* 849ᵃ 33, *ὀρθὴ πρός* 855ᵇ 10, 11, 22, *γωνίαν ποιεῖν πρός* 858ᵃ 2, *αἱ περιέχουσαι* (*γωνίαν*) 851ᵃ 14. Aber auf der anderen Seite hat die Mechanik auch Abweichungen vom Euklidischen Sprachgebrauch mit Aristoteles gemeinsam, so *κύκλος κύκλου ἅπτεται* statt *ἐφάπτεται* 848ᵃ 26 (vgl. *Elem.* III def. 3: *κύκλοι ἐφάπτεσθαι ἀλλήλων λέγονται, οἵτινες ἁπτόμενοι ἀλλήλων οὐ τέμνουσιν ἀλλήλους*; aber 851ᵇ 22, 25, 26, 28 ist *ἅπτεσθαι* korrekt), *στιγμή* 851ᵇ 22, 28 neben *σημεῖον* 849ᵇ 13, 20, 854ᵇ 17, 855ᵃ 9 usw., *πρὸς ὁμοίας γωνίας* 857ᵇ 25, *πρὸς ὀρθήν* 857ᵇ 26, 33 (sogar *πρὸς ὄρθιον τῷ ἐπιπέδῳ* 851ᵇ 27), *ὅπερ* statt *ὡς* 851ᵇ 39 (aber *ὡς* 849ᵇ 15), *I* auf der Figur 856ᵇ 11, 855ᵇ 7, 20, 23, 854ᵃ 28. Der Mechanik eigentümlich sind folgende Differenzen: *δίχα διαιρεῖν* 850ᵃ 9, 14, 25, mit *κατά* 856ᵇ 11 (Euklid sagt *τέμνειν*, aber nach ihm kommt auch *διαιρεῖν* vor), *κάθετος πρός* statt *ἐπί* 857ᵇ 28 (merkwürdig *κάθετος καὶ ὀρθὴ πρός* 855ᵇ 19), *ἐμβληθεῖσαι* statt *ἐναρμοσθεῖσαι* 849ᵃ 36, *ἐπὶ μείζονα καθῆσθαι* statt *ἐπὶ μείζονος βεβηκέναι* 851ᵃ 13, *ὅμοιον τῷ λόγῳ* 848ᵇ 19. *παραπληρωθῆναι* und noch mehr *τὸ παραπληρωθέν* 854ᵇ 29 stimmt zu *παραπληρώματα Elem.* II def. 2, aber für *τὸ ἑτερόμηκες παραπεπληρώσθω* 849ᵃ 25 sagt Euklid *Elem.* VI 16 S. 118, 18 und VI 23 S. 146, 17 *συμπεπληρώσθω*, und *παραπληρωθέντος οὖν ἀπὸ τοῦ H* 854ᵇ 37 (vgl. *ἀπὸ τοῦ E πεπληρώσθω* 854ᵇ 29)

sowie παραπληρωθεισῶν τῶν πλευρῶν 848^b 28 fällt gänzlich aus dem gewöhnlichen Sprachgebrauch heraus. ὃ οὖν τὸ κινούμενον βάρος πρὸς τὸ κινοῦν, τὸ μῆκος πρὸς τὸ μῆκος ἀντιπέπονθεν 850^a 39 (zu vergleichen mit ὅπερ statt ὡς 851^b 39) würde Euklidisch heißen: ἀντιπέπονθε τὰ βάρη τοῖς μήκεσι. Die geringe Festigkeit und Konsequenz, die für diese Terminologie so charakteristisch ist (vgl. noch ἥξει 849^a 27, aber ἀφικνεῖται 849^a 3, γραμμὴ τοῦ κύκλου 851^b 34, 855^a 31, aber περιφέρεια 855^a 37, ^{b} 13, 16) tritt besonders hervor in der Buchstabenbezeichnung, wo die Mannigfaltigkeit ganz dieselbe ist wie bei Aristoteles selbst; für Punkt findet sich τὸ *Α* 848^b 16, 17, 21, 849^b 16 usw., τὸ ἐφ' οὗ *Β* 849^a 2, ^{b} 12, 850^b 9, 851^a 25, 854^a 28, 857^a 18, ἐφ' οὗ τὸ *Α* 855^b 9, 857^a 29, ἐφ' ᾧ *Κ* 854^b 5, vgl. 853^a 27, 856^a 2, ἐφ' ᾧ τὸ *Δ* 850^b 7, 8, 854^a 26, οὗ τὸ *Α* 850^a 26, 27, 856^b 15, 16, für Linie ἡ *ΑΒ* 848^b 14, 15, 18, 849^a 4, 25, 26, 28, 29 usw., ἡ ἐφ' ᾗ *ΑΒ* 848^b 16, 849^a 5, 6, 850^a 16, 854^a 27, vgl. ἐν ᾧ *ΦΠ* 850^a 17 und ἐν ᾧ τὸ *Κ* 850^a 29, ἡ ἐφ' ἧς *ΑΒ* 849^a 24, 34, 850^a 11, 17, 24, ^{b} 6, 855^b 7, 8, 13, ἐφ' ἧς τὰ *Γ*, Ζ 857^b 37, ἐφ' ἧς ἡ *ΑΔΜ* 850^a 12, ἡ τὸ *ΕΓ* 854^b 4, für Winkel ἡ *Β* γωνία 856^b 23, 24, 26, ἡ κατὰ τὸ Ζ γωνία 856^b 25, 26, und sehr auffallend τῆς γωνίας τῶν *Α* 854^b 10 (τοῦ *Α* eine Hs., ebenso ungewöhnlich), für den Kreis ὁ *ΑΒ* κύκλος 848^a 26, κύκλος ὁ *ΑΒΓ* 849^a 2, κύκλος ἐφ' οὗ *ΓΔ* 848^a 26, 27, 30, 31, 849^a 22, 23, ἐφ' οὗ *Α* 848^a 29, ἐφ' οὗ τὸ *ΑΒ* 848^a 31, ἐφ' οὗ τὰ *Δ*, Ζ, *Γ* 855^b 5, 6.

Hieraus könnte man schließen wollen, daß die Mechanik entstanden sei, ehe Euklid die mathematische Terminologie konsequenter und bequemer machte, und eine solche Annahme bleibt möglich; denn daß τετράπλευρον erst von Euklid geschaffen sei, ist nur eine Vermutung, wenn auch eine sehr wahrscheinliche. Aber die Tatsachen der Terminologie lassen sich ebensogut durch die Annahme erklären, daß das Werkchen nach Euklid in Kreisen verfaßt worden, die von der älteren, bezw. der Aristotelischen, Terminologie beherrscht nur teilweise sich der Euklidischen anbequemt hatten.

In der großen Sammlung der *Probleme* kommt, wie schon bemerkt, ebenfalls τετράπλευρον vor 911^b 3 (τραπέζιον 911^a 7, bei Euklid nur I def. 22, nicht bei Aristoteles). Das unechte Axiom *Elem.* I κοιν. ἔνν. 9 (s. auch zu S. 8, 19): καὶ δύο εὐθεῖαι χωρίον οὐ περιέχουσιν wird 911^a 26: εἰ δὲ μή, εὐθεῖα εὐθείας διχῇ ἅψεται in anderer Fassung benutzt. *Elem.* I 32 dient als Beispiel 956^a 15: τὸ τρίγωνον δύο ὀρθαῖς ἴσας ἔχει τὰς ἐντὸς γωνίας, VI 20 (der spezielle Fall des Quadrats) ebenso 917^b 24: ἡ γραμμὴ ἡ δίπους οὐ διπλάσιον ἀλλὰ τετραπλάσιόν τι γράφει. *Elem.* I 15 ist in ganz Euklidischer Form angewandt 911^a 29: καὶ ⟨αἱ⟩[1]) ἐν τῷ τριγώνῳ (sc. γωνίαι

1) αἱ fehlt in den Hss. Überhaupt ist der Text bei Bekker etwas verunstaltet.

ἴσαι)· κατὰ κορυφὴν γὰρ ταύταις, ebenso *Elem.* III 27 sowohl 911ª 15: ὅτι ἴσαι γίνονται αἱ γωνίαι πρὸς τὰ ὁρώμενα αἱ ὑπὸ[1]) τῶν ἀκτίνων ὑπὸ ταῖς ἴσαις περιφερείαις und deutlicher 911ª 27: ἐπεὶ οὖν ἴση ἡ *AB* τῇ *BΓ*, καὶ αἱ γωνίαι αἱ ὑπὸ ταύτῃ[2]) αἱ πρὸς τῷ *Δ* ἴσαι ἔσονται· πρὸς τῷ κέντρῳ γάρ; *Elem.* XI 1: εὐθείας γραμμῆς μέρος μέν τι οὐκ ἔστιν ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ, μέρος δέ τι ἐν μετεωροτέρῳ ziemlich genau 914ª 38: τῆς γὰρ εὐθείας οὐκ ἔστι τὸ μὲν ἐν ἄλλῳ τὸ δὲ ἐν ἄλλῳ ἐπιπέδῳ.

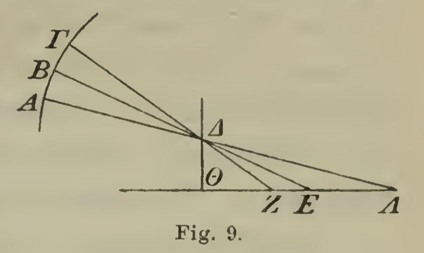


Fig. 9.

Elem. XI 6: ἐὰν δύο εὐθεῖαι τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ὦσιν, παράλληλοι ἔσονται αἱ εὐθεῖαι kommt vor 913ᵇ 28: καθέτους δὲ πλείους πρὸς ταὐτὸ ἐπίπεδον μὴ γίνεσθαι τεμνούσας αὐτάς (nicht αὐτάς). XVI 5 handelt von rollenden Zylindern und Kegeln, lehrt aber nichts eigentlich Mathematisches; 913ᵇ 38 ist von τοῖς ὁρίζουσιν αὐτὸν (den Zylinder) κύκλοις die Rede, ebenso 914ª 11: τοῦ δὲ κυλίνδρου πάντων ἴσων ὄντων τῶν κύκλων καὶ περὶ ταὐτὸ κέντρον, 913ᵇ 39 von der κορυφή des Kegels, 914ª 1 heißt dessen Basis ὁ ὁρίζων κύκλος (zu lesen mit einer Hs. τῷ ὁρίζοντι κύκλῳ· κύκλῳ), während 914ª 26 von einem Schnitt παρὰ τὴν βάσιν des Zylinders gesprochen wird; daß ein solcher einen Kreis erzeugt, wird 914ª 28 ff. gesagt.

910ᵇ 11: διὰ τί διάμετρος καλεῖται μόνη τῶν δίχα διαιρουσῶν τὰ εὐθύγραμμα ἡ ἐκ γωνίας εἰς γωνίαν ἀχθεῖσα γραμμή (vgl. 910ᵇ 19—21) befolgt den Sprachgebrauch des Aristoteles und Euklid, die Durchmesser des Kreises und Diagonal des Vierecks nicht unterscheiden (ebensowenig die Mechanik, s. 848ᵇ 12, 23, 28, 854ᵇ 32, 33, 35 usw.). Euklid definiert nur den Kreisdurchmesser I def. 17; beim Parallelogramm tritt ἡ διάμετρος ohne Vorbereitung auf I 34: καὶ ἡ διάμετρος αὐτὰ δίχα τέμνει; doch hat er dafür auch διαγώνιος XI 28 S. 84, 15, 19, vgl. Proklos *in Elem.* S. 156, 11—19.

Die Bemerkungen über ἡ δεκάς XV 3 (910ᵇ 31: πότερον ὅτι τὰ δέκα τέλειος ἀριθμός; ἔχων γὰρ πάντα τὰ τοῦ ἀριθμοῦ εἴδη, ἄρτιον περιττόν, τετράγωνον κύβον, μῆκος ἐπίπεδον, πρῶτον σύνθετον. ἢ ὅτι ἀρχὴ ἡ δεκάς; ἓν γὰρ καὶ δύο καὶ τρία καὶ τέτταρα γίνεται δεκάς) sind pythagoreischen Ur-

1) 911ª 16 steht ἀπὸ τῶν ἀκτίνων gegen die Hss. Z. 17 ist zu schreiben: εἶτ' αὗται (die γωνίαι τῶν ἀκτίνων oder vielleicht eher die ἀκτῖνες) καὶ ἐκβαλλόμεναι ποιοῦσιν ἀκτῖνας ἐν τῷ τριγώνῳ, ὃ περιέχεται ὑπὸ usw., wie sich aus der obenstehenden Figur ergibt. Dieselbe zeigt ebenfalls, daß Z. 24 und 25 *ΘΛ* statt *ΘA* zu schreiben, Z. 24 *Λ* statt *A*, Z. 31 *ΛE* statt *ΔE*. Z. 31 ist τῇ *ΔΘ* zu streichen. Z. 29 εἰ δὲ τῇ τοῦ *Δ* ist unverständlich, vermutlich wegen einer Lücke; es muß heißen: wenn sie durch *Δ* verlängert werden.

2) Z. 28 steht in den Hss. ὑπὸ ταύτης statt ὑπὸ ταύτῃ.

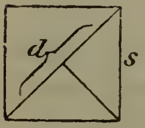
sprungs; das meiste, so die Bezeichnung τέλειος, das sonst bei den Mathematikern eine andere Bedeutung hat (*Elem.* VII def. 23), findet sich bei Speusippos, der es dem Philolaos entlehnt hatte (*Theolog. arithm.* S. 61 ff. ed. Ast, vgl. Anatolios ebenda S. 63). Die Worte 910ᵇ 36: ἢ ὅτι ἐν δέκα ἀναλογίαις τέτταρες κυβικοὶ ἀριθμοὶ ἀποτελοῦνται, ἐξ ὧν φασιν ἀριθμῶν οἱ Πυθαγόρειοι τὸ πᾶν συνεστάναι enthalten den Satz *Elem.* IX 8; unter den 10 proportionalen Gliedern $1 : n : n^2 : n^3 : n^4 : n^5 : n^6 : n^7 : n^8 : n^9$ sind 4 Kubikzahlen, die Einheit mitgerechnet. ὅρος Glied 920ᵃ 28.

Die Terminologie hat die Aristotelischen Eigentümlichkeiten ὁμοίας γωνίας 913ᵇ 8, πρὸς ὀρθήν 913ᵇ 9, 34, auch in der Buchstabenbezeichnung (ἐφ' ᾧ ΑΔ 912ᵇ 7, ἡ τὸ ΔΖ 912ᵇ 8, 9, ἐφ' ἧς τὸ ΓΖ 912ᵃ 40, οὗ τὸ Γ 912ᵃ 39, 40); doch überwiegt hier die Euklidische Weise (ἡ ΘΑ 911ᵃ 25, 31, 912ᵇ 1, von einem Kreisbogen 911ᵃ 27, 28, ähnlich τὸ ΘΑ 911ᵃ 24, 912ᵃ 39, ᵇ 10, τὸ Α 911ᵃ 23, 24, 25, 26, 912ᵃ 40, γωνία ἡ πρὸς τῷ Δ 911ᵃ 28; uneuklidisch die Weglassung des Artikels 912ᵇ 7, 8). στιγμή kommt nicht vor, σημεῖον 912ᵃ 38, 913ᵇ 8 usw.; ἡ τοῦ κύκλου περιφέρεια 911ᵇ 37, vgl. 911ᵇ 30, 32. Abweichend von Euklid ist ὑπὸ περιφερείᾳ 911ᵃ 17, 28 statt βεβηκυῖα ἐπὶ περιφερείας, und διαιρεῖν für τέμνειν 911ᵃ 21, 31, 913ᵇ 28, κάθετος πρός 913ᵇ 28, diese beiden Wendungen in Übereinstimmung mit der *Mechanik.*

Die Abhandlung περὶ ἀτόμων γραμμῶν behandelt zwar ein mathematisches Thema, das auch Aristoteles selbst beschäftigt hat (s. oben S. 23 f.), bietet aber für unsere Zwecke verhältnismäßig wenig. Benutzt werden folgende Sätze:

970ᵃ 10: ἐν ἅπαντι δὲ ἰσοπλεύρῳ ἡ κάθετος ἐπὶ μέσην πίπτει, mit einbegriffen in *Elem.* I 10.[1])

970ᵃ 8: ἔτι εἰ ἐκ τριῶν δοθεισῶν ⟨ἴσων⟩[2]) εὐθειῶν συνίσταται τρίγωνον = *Elem.* I 22.


Fig. 10.

970ᵃ 11: ἔτι εἰς[3]) τὸ τετράγωνον τῶν ἀμερῶν διαμέτρου[4]) ἐμπεσούσης καὶ καθέτου ἀχθείσης ἡ τοῦ τετραγώνου πλευρὰ τὴν κάθετον δύναται καὶ τὴν ἡμίσειαν τῆς διαμέτρου = *Elem.* I 47.

1) Es ist bemerkenswert, daß Proklos (*in Elem.* S. 279, 4 ff.) diesen Satz gegen Xenokrates' Lehre von den ἄτομοι γραμμαί verwendet, wahrscheinlich nach Geminus (ib. S. 278, 12).

2) Fehlt in den Hss. Aber das Dreieck wird Z. 10 als ἰσόπλευρον bezeichnet, und aus drei *beliebigen* Geraden kann nicht immer ein Dreieck konstruiert werden.

3) εἰ die Hss.

4) So einleuchtend für διὰ μέσου Apelt, der in seiner Ausgabe (Lips. 1888) S. XVI die Stelle richtig erklärt.

Derselbe Satz liegt auch den folgenden, durch Kürze etwas unklaren Worten[1]) zu Grunde:

970ᵃ 14: οὐδὲ διπλάσιον τὸ ἀπὸ τῆς διαμέτρου χωρίον ἔσται τοῦ ἀπὸ τῆς ἀτόμου· ἀφαιρεθέντος γὰρ τοῦ ἴσου ἡ λοιπὴ ἔσται ἐλάσσων τῆς ἀμεροῦς· εἰ γὰρ ἴση, τετραπλάσιον ἂν ἀνέγραφεν ἡ διάμετρος.

969ᵃ 4: πᾶσαν δὲ τμηθῆναι δυνατὸν τὴν μὴ ἄτομον τὸν ἐπιταχθέντα λόγον[2]) = *Elem.* VI 10: τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν ἄτμητον τῇ δοθείσῃ τετμημένῃ ὁμοίως τεμεῖν (zu ἐπιταχθέντα vgl. *Elem.* VI 9 S. 104, 19).

Als bekannt wird vorausgesetzt ἀποτομή (*Elem.* X 73), ἡ ἐκ δύο ὀνομάτων (*Elem.* X 36), s. 968ᵇ 18: οὐκ ἔσται οὔτε ῥητὴ οὔτ' ἄλογος οὔτε τῶν ἄλλων οὐδεμία, ὧν νῦν δὴ εἴρηται[3]), οἷον ἀποτομὴ ἢ ἐκ δυοῖν ὀνομάτοιν, und überhaupt die Lehre von den irrationalen Größen, s. 968ᵇ 6: εἰ σύμμετροί εἰσιν αἱ τῷ αὐτῷ μέτρῳ μετρούμεναι = *Elem.* X def. 1, 968ᵇ 15: πάντα γὰρ τὰ ἀπὸ τῶν ῥητῶν γραμμῶν σύμμετρα ἀλλήλοις = *Elem.* X def. 4, 969ᵇ 33: ἔπειτα πᾶσαι αἱ γραμμαὶ σύμμετροι ἔσονται· πᾶσαι γὰρ ὑπὸ τῶν ἀτόμων μετρηθήσονται αἵ τε μήκει σύμμετροι καὶ αἱ δυνάμει· αἱ δὲ ἄτομοι σύμμετροι πᾶσαι μήκει· ἴσαι γάρ· ὥστε καὶ δυνάμει = *Elem.* X 9 coroll., 969ᵇ 7: τὸ δ' ἐπὶ τῶν συμμέτρων γραμμῶν, ὡς ὅτι αἱ πᾶσαι τῷ αὐτῷ τινι καὶ ἑνὶ μετροῦνται, κομιδῇ σοφιστικὸν καὶ ἥκιστα κατὰ τὴν ὑπόθεσιν τὴν ἐν τοῖς μαθήμασιν· οὔτε γὰρ ὑποτίθενται οὕτως οὔτε χρήσιμον αὐτοῖς ἐστιν. ἅμα δὲ καὶ ἐναντίον πᾶσαν μὲν γραμμὴν σύμμετρον γίνεσθαι, πασῶν δὲ τῶν συμμέτρων κοινὸν μέτρον εἶναι ἀξιοῦν, s. *Elem.* X def. 3: τούτων ὑποκειμένων δείκνυται, ὅτι τῇ προτεθείσῃ εὐθείᾳ ὑπάρχουσιν εὐθεῖαι πλήθει ἄπειροι σύμμετροί τε καὶ ἀσύμμετροι, mit dem Scholium nr. 21. Ferner die Operation des παραβάλλειν (*Elem.* I 44, VI 28 und 29) 970ᵃ 4: ἔτι εἰ παρὰ τὴν μείζω ⟨ἔλαττον⟩ τὸ πλάτος ποιεῖ παραβαλλόμενον τὸ ἴσον, τὸ ὑπὸ τῆς ἀτόμου καὶ τῆς ποδιαίας παραβαλλόμενον παρὰ τὴν δίπουν ἔλαττον ποιήσει τὸ πλάτος τῆς ἀμεροῦς· ἔσται ἄρα ἔλαττόν τι τῆς ἀτόμου.[4])

---

1) Wenn man die ἄτομος γραμμή als Quadratseite nimmt, wird nicht (wie es nach I 47 sein muß) $d^2 = 2s^2$. Denn (wenn $d^2 = 2s^2$, ist $d < 2s$, also) $d - s < s$. Wenn nämlich $d - s = s$, wird $d^2 = 4s$. Vgl. Apelt a. a. O. S. XVI, der richtig mit einer Hs. ἴση statt ἴσως geschrieben hat. ἀνέγραφεν ist meine Vermutung statt ἔγραψεν, vgl. *Elem.* vol. III S. 4, 2—3.

2) So Apelt mit einer Hs. und ed. pr.; λόγον fehlt in den Hss.

3) Apelts Konjektur für diese korrupten Worte: ὧν δυνάμεις ῥηταί kann nicht richtig sein; denn die ἀποτομή und ἐκ δύο ὀνομάτων sind ἄλογοι, nicht δυνάμει ῥηταί. ἀποτομὴν ἐκ die Hss., ἀποτομὴ ἢ ἡ Apelt.

4) So glaube ich die verdorbene Stelle richtiger und einfacher als Apelt S. XIV ff. hergestellt zu haben; ἡ παραβαλλομένη bei Apelt S. 147, 8—9 ist überhaupt nichts. ἔλαττον fehlt in den Hss., statt τὸ ὑπὸ haben sie τὸ ἀπό, ἄρα fehlt, und statt τι haben die Hss. τὸ περὶ oder τὸ παρά, statt παρὰ τὴν δίπουν eben-

972ª 21: γραμμῆς δ' ἦν ἡ ἀρχὴ καὶ τὸ πέρας στιγμή, vgl. 970ᵇ 10, 23 ff., entspricht *Elem.* I def. 3: γραμμῆς δὲ πέρατα σημεῖα.

971ᵇ 15: ἔτι καὶ ἡ τοῦ κύκλου (sc. στιγμή) τῆς εὐθείας ἅψεται κατὰ πλείω ... εἰ δὲ τοῦτο μὴ δυνατόν — wegen *Elem.* III def. 2.

971ᵇ 11: εὐθεῖα εὐθείας ἅψεται κατὰ δύο στιγμάς ist das unechte Axiom *Elem.* I κοιν. ἔνν. 9 in einer an 911ª 26 erinnernden Fassung (oben S. 32).

Als Definitionen des Punktes werden erwähnt und widerlegt τὸ ἐλάχιστον τῶν ἐν γραμμῇ 972ª 31, ᵇ 24 und ἄρθρον ἀδιαίρετον 972ᵇ 25. Es wird immer στιγμή, nie σημεῖον gesagt.

969ᵇ 31: οὔτε γὰρ ὁ τῆς γραμμῆς οὔτε ὁ τῆς εὐθείας ὅρος ἐφαρμόσει τῇ ἀτόμῳ διὰ τὸ μήτε μεταξύ τινων εἶναι μήτ' ἔχειν μέσον setzt für die γραμμή die Definition als Grenze voraus (Apollonios bei Proklos *in Elem.* S. 100, 6 ff.), für εὐθεῖα die Platonische: ἧς τὰ μέσα τοῖς ἄκροις ἐπιπροσθεῖ (Proklos S. 109, 21 ff., oben S. 7). 971ᵇ 21: ἔτι πῶς ποτε ἔσται εὐθεῖα γραμμὴ καὶ περιφερής tritt die Aristotelische (oben S. 12 ff.) Einteilung der γραμμαί wieder auf. περιφέρεια kommt vor in der noch nicht überzeugend geheilten Stelle (vgl. Apelt S. XII ff.) 969ᵇ 10—21, wo von der Erzeugung eines Halbkreises und eines Kreises durch eine sich drehende Gerade die Rede ist (τὴν τῆς εὐθείας εἰς τὸ ἡμικύκλιον κίνησιν Z. 19 und τὴν εἰς τὸν κύκλον Z. 21 hat Apelt sicher richtig hergestellt). Ebenda Z. 21 διάστημα, wie *Elem.* I αἰτ. 3 und oft, vom Radius. Für Fläche ist ἐπίπεδον das gewöhnliche (968ª 13, ᵇ 14, 970ᵇ 31, 971ª 2, 10, 972ª 2, 8, 29, 30, ᵇ 3, 9, 11, 28), aber 972ᵇ 14 steht in genau derselben Bedeutung ἐπιφάνεια wie *Elem.* I def. 5. Ebenso herrscht nach philosophischem Sprachgebrauch σῶμα vor (z. B. 969ª 25, 970ᵇ 31, 971ª 2, 972ª 7, 11, ᵇ 10, 970ᵇ 33: σῶμα οὐκ ἔσται ἀδιαίρετον διὰ τὸ εἶναι ἐν αὐτῷ βάθος καὶ πλάτος), aber das στερεόν der Mathematiker (*Elem.* XI def. 1) kommt auch vor (972ª 29, 30, ᵇ 9, 14). Dasselbe Schwanken zeigt sich im Gebrauch von τέμνειν und διαιρεῖν, so 970ª 29, 30: δίχα τέμνειν, 970ᵇ 7: εἰς ἴσα καὶ ἄνισα τέμνειν, 969ª 4: λόγον τμηθῆναι, alles ganz Euklidisch (vgl. noch 970ª 31, ᵇ 6, 972ª 3), aber 970ª 31: δίχα διαιρεῖν (neben τέμνειν), εἰς ἄνισα διαιρεῖν 970ª 33, καὶ ἴσα καὶ ἄνισα διαιρεῖσθαι 970ª 27 usw. Nicht Euklidisch ist 971ᵇ 5: ἐὰν οὖν ἐκ τοῦ *K* ἐκβληθῇ ἡ *AB*. Dagegen sind die wenigen Buchstabenbezeichnungen wie bei Euklid (τὸ *K* 971ᵇ 5, 6, 8, ἡ *AB* 971ᵇ 6, 12, 13).[1])

---

falls περὶ τὴν δ. (dies hat schon Apelt berichtigt). Alles übrige hat handschriftliche Gewähr; denn daß das erste παραβαλλόμενον nur in der Verunstaltung παραλαμβανόμενον in der besten Hs. überliefert ist (die übrigen περιβαλλομένη), wie auch an der zweiten Stelle, wo die übrigen Hss. das richtige haben, verschlägt natürlich nichts.

1) Ich benutze die Gelegenheit, um zu der von Hayduck und Apelt sehr

Auch für diese Schrift bestätigt sich also, wie für die *Mechanik* und die *Probleme*, daß die etwas veraltete und inkonsequemte Terminologie der Schule sich gegen die Fortschritte der Mathematiker zähe behauptet.

III.

Die mathematischen Stellen des Aristoteles werden zwar von den antiken Kommentatoren sorgfältig mit erläutert unter Herbeiziehung sowohl von Euklid als von älterer Literatur aus Eudemos; aber eine Schrift wie Theon aus Smyrna τὰ κατὰ τὸ μαθηματικὸν χρήσιμα εἰς τὴν Πλάτωνος ἀνάγνωσιν scheint es im Altertum für Aristoteles nicht gegeben zu haben. Dagegen haben die Byzantiner solche Zusammenstellungen gemacht. Eine im *cod. Magliab.* XI 53 erhaltene unter dem Namen des Psellos habe ich kurz erwähnt in meiner Abhandlung über die Scholien zu Euklids *Elementen* (in den Schriften der dänischen Gesellschaft der Wissenschaften, 1888, S. 252); eine zweite, die wenigstens für byzantinische Verhältnisse nicht ohne Interesse ist, folgt hier. Sie steht im *cod. Vindobon. philos.* 150 f. 199ʳ—205ᵛ und entstammt einer Vorlesung des Joannes Pachymeres über das *Organon.* Die Überschrift[1]) lautet nämlich: τοῦ σοφωτάτου πρωτεκδίκου τῆς ἁγιωτάτης τοῦ θεοῦ μεγάλης ἐκκλησίας καὶ δικαιοφύλακος διδασκάλου μου τοῦ Παχυμερῆ ἐξήγησις συντομωτάτη καὶ λίαν λαμπρὰ εἰς ὅλον τὸ ὄργανον. fol. 1—10ᵛ enthalten allgemeine Definitionen (*inc.* φιλοσοφία ἐστὶν ἐξ ὑποκειμένου), f. 10ᵛ—26ᵛ den Kommentar zu den Kategorien, f. 26ᵛ—38ᵛ zu Περὶ ἑρμηνείας, f. 39—73ʳ zu *Anal. pr.* I (f. 58ᵛ τέλος τῶν μίξεων, f. 59ʳ τοῦ σοφωτάτου πρωτεκδίκου τῆς ἁγιωτάτης τοῦ θεοῦ μεγάλης ἐκκλησίας καὶ διδασκάλου μου τοῦ Παχυμερῆ ἐξήγησις τῶν ὑποθετικῶν συλλογισμῶν Ἀριστοτέλους), f. 73ʳ—86ᵛ zu *Anal. pr.* II, f. 86ᵛ—105ʳ zu *Anal. post.* I, f. 105ʳ—116ʳ zu *Anal. post.* II, f. 116ʳ—177ᵛ zur *Topik* (*des.* τέλος τῆς διαλεκτικῆς), f. 177ᵛ—198ᵛ zu Περὶ σοφιστικῶν ἐλέγχων (*des.* ὥστε καὶ παρὰ τούτου εὑρέθη καὶ παρ' αὐτοῦ τετελείωται, ᾧ δὴ πάντας ἡμᾶς οὐ πολλήν, ὡς αὐτὸς ἔφησεν, ἀλλ' οὐδ' ὅσην εἰπεῖν ἔχειν προσήκει χάριν: †τῷ συν-

---

geförderten Textkritik des verwahrlosten Büchleins ein paar Kleinigkeiten beizutragen. 969ᵃ 18 τοὔλαττον] οὐκ ἔλαττον? 21 δὲ τῶν] δὲ ⟨ἐπὶ⟩ τῶν? 970ᵃ 31 ὅσα] ὁσαοῦν Apelt mit Hayduck, eher ⟨εἰς ἄν⟩ισα. 971ᵃ 28 ὅλως] ὅλης einige Hss., ὅλως ἄν Apelt mit Hayduck, eher ὅλη ἄν. 29 ἤ] ἦ? ᵇ 23 καὶ οὐκ ἔστιν ὅλως] καὶ οὐκ ἔστιν ἄλλως Apelt mit Hayduck, eher ἢ οὐκ ἔστιν ὅλως.

1) Sie ist zwar von μεγάλης an sehr verwischt, aber die oben gegebene Lesung Nessels wird bestätigt durch eine teilweise Wiederholung auf einem Pergamentblatt, das als Umschlag von zwei Papierblättern mit einigen Versen vorn eingeheftet ist.

τελεστῇ τῶν καλῶν θεῷ χάρις. ἀμήν.† Darauf rot als Lemma: *ἔχειν προσήκει χάριν*, und dann: *ἡμεῖς δὲ ἀλλ' οὐχ ὅπως συγγνώμην ἔχειν σοι τῶν ἐλλελειμμένων ὀφείλομεν ἀλλὰ καὶ συγγνώμην ζητοῦμεν, ἐφ' οἷς οὐκ ἀξίως χάριν τῶν εὑρημένων ἀνελ⟨λ⟩ιπῶς τὴν χάριν σοι ἔχομεν*), f. 199r—205v das hier herausgegebene Stück[1]), f. 206r leer, f. 206v Definitionen der Philosophie, f. 207 bis 212r exegetische Notizen, f. 212r Schluß Berechnung der Zahl der möglichen *προτάσεις* (*͵γκδ*) mit der Überschrift *τοῦ Πλανούδη*, f. 212v zwei kleine Stücke logischen Inhalts, Überschrift *τοῦ Πλανούδη*. Die Planudesstücke sind von einer besonderen Hand, wahrscheinlich autograph wie die Planudes-Scholien im *cod. Laur.* 28, 2 (s. meine oben angeführte Abhandlung S. 272 ff.), das übrige ist wahrscheinlich von *einer* Hand geschrieben, obgleich Schrift und Tinte ziemlich ungleich sind. Es ist ein Kollegienheft des 14. Jahrhunderts. Demgemäß habe ich nur ganz offenkundige Schreibfehler des Schülers berichtigt.

Σημείωσαι καὶ ταῦτα συντελοῦντα εἰς τὸ Ὄργανον, ὧν σποραδὴν ἐν τῇ αὐτῇ πραγματείᾳ ὁ Ἀριστοτέλης ἐμνήσθη·

Euklid Elem. I 13.

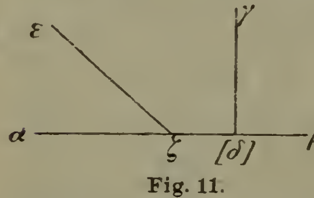


Fig. 11.

ὡς ἂν εὐθεῖα ἐπ' εὐθεῖαν σταθῇ, τὰς ἐφεξῆς γωνίας ἢ δύο ὀρθὰς ἔχει ἢ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας. ἐπ' εὐθεῖαν γὰρ τὴν αβ ἡ γδ εὐθεῖα ἐμπέπτωκε, καί 5 *ἐστιν ἡ ὑπὸ αδγ ἴση τῇ ὑπὸ γδβ, καὶ ὀρθαὶ ἀμφότεραι· κατὰ κάθετον γάρ. ἢ πάλιν ἐπὶ τὴν αβ εὐθεῖαν εὐθεῖα ἐνέπεσεν ἡ εζ, καί ἐστιν ἡ ὑπὸ αζε καὶ ἡ ὑπὸ εζβ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι· οὐ γὰρ κατὰ κάθετον, ἀλλὰ πλαγία ἐνέπεσεν.*

Euklid I 29.

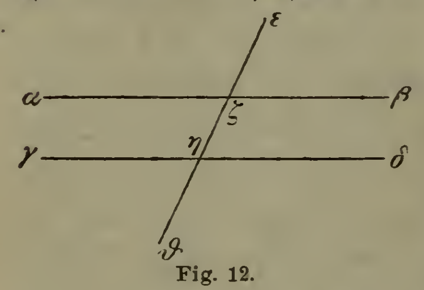


Fig. 12.

ἐὰν εἰς παραλλήλους εὐθεῖα ἐμπέσῃ, τὰς 10 *ἐναλλὰξ γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιεῖ. εἰς παραλλήλους γὰρ τὰς αβ, γδ εὐθεῖα ἐνέπεσεν ἡ εζηθ, καί ἐστιν ἡ ὑπὸ αζη γωνία ἴση τῇ ὑπὸ ζηδ, καὶ εἰσιν ἐναλλάξ· ἀντιστρόφως γὰρ κεῖνται ἐντὸς τῶν παραλλήλων γραμμῶν· διὰ* 15 *τοῦτο γὰρ καὶ ἐναλλὰξ κέκληνται. ὁμοίως καὶ αἱ ζ καὶ η γωνίαι ἴσαι καὶ αὐταί εἰσιν, ὅτι καὶ αὐταὶ ἐναλλάξ εἰσιν.*

---

1) f. 199—206 ist *eine* Lage, numeriert oben *ιθ*, unten *κζ* aus *ιθ* korrigiert. Die Lagen *α—η* haben nur diese Numerierung (oben und unten, *ε* hat 6 Blätter, *η* 4, die übrigen 8), von da an doppelte Zählung, unten *θ—ιβ* (*θ* steht f. 59r), oben, wie es scheint, *α—γ*, auf Lage *ιβ* nur diese Zahl; auf den beiden folgenden nur *ε*, *ϛ* (unten), dann oben und unten *ζ*, *η* usw. bis *ιη*, unten korrigiert in *ιε*, *ιϛ* usw. bis *κϛ*. Die Lage *ιη* = *κϛ* hat nur 4 Blätter. Der Schluß ist nicht numeriert.

---

6 *ἡ*] supra scr. *αδγ*] *αγδ*.

ἐὰν εἰς παραλλήλους εὐθεῖα ἐμπέσῃ, ἡ ἐκτὸς γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη. εἰς παραλλήλους γὰρ τὰς αβ, γδ εὐθεῖα ἐνέπεσεν ἡ εζηθ, καί ἐστιν ἡ ἐκτὸς γωνία ἡ ὑπὸ εζβ ἴση τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον καὶ 5 ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τῇ ὑπὸ ζηδ· ἔστι γὰρ καὶ ἡ ζ γωνία ἐντός, ἀλλ' οὐκ ἀπεναντίον· ἔστι καὶ ἡ ἀντικειμένη τῇ η γωνίᾳ καὶ τῇ ζ ἐντός, ἀλλ' οὐδ' αὗται ἀπεναντίον.

Euklid I 29.

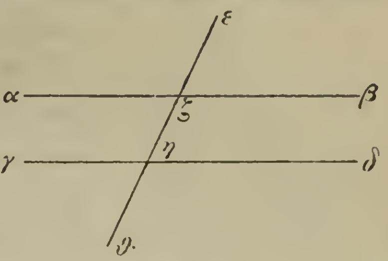


Fig. 13.

Euklid I 32.

διὰ τῶν τριῶν τούτων θεωρημάτων κατα- 10 σκευάζεται, ὅτι αἱ τρεῖς τοῦ τριγώνου γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν.

ἔστω τρίγωνον τὸ αβγ. λέγω, ὅτι αἱ τρεῖς τούτου γωνίαι, ἡ ὑπὸ αβγ καὶ ἡ ὑπὸ βγα καὶ τρίτη ἡ ὑπὸ γαβ, δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσί.

προσεκβεβλήσθω γὰρ ἡ βγ εὐθεῖα ἐπὶ τὸ δ, καὶ γενέσθω γωνία ἔξω τοῦ τριγώνου ἡ ὑπὸ αγδ· καὶ ἐνέπεσεν ἡ αγ εὐθεῖα ἐπ' 15 εὐθεῖαν τὴν βγδ, καί εἰσιν αἱ ἐφεξῆς γωνίαι ἥ τε ὑπὸ αγβ καὶ ἡ ὑπὸ αγδ ἢ δύο ὀρθαὶ ἢ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι. ἀλλ' ἡ ὑπὸ αγβ ἡ μία γωνία τοῦ τριγώνου ἐστίν. ἐὰν οὖν δειχθῇ καὶ ἡ ἔξω γωνία ἡ ὑπὸ αγδ ὅλη ἴση ταῖς ἑτέραις δυσὶ τοῦ τριγώνου γωνίαις, ἔχομεν τὸ ζητού- 20 μενον· ὡς γὰρ ἡ μία γωνία τοῦ τριγώνου μετὰ ταύτης τῆς ἔξω δυσὶν ὀρθαῖς ἦσαν ἴσαι, οὕτω καὶ πάλιν ἡ μία αὕτη τοῦ τριγώνου γωνία σύναμα ταῖς ἑτέραις δυσὶ τοῦ τριγώνου γωνίαις δύο ὀρθὰς ποιήσουσι. τετμήσθω ὅλη ἡ ὑπὸ αγδ γωνία διὰ τῆς εὐθείας τῆς εγ εἰς δύο γωνίας τήν τε ὑπὸ αγε καὶ τὴν ὑπὸ εγδ, καὶ ἔστω παράλληλος ἡ εγ τῇ αβ· καὶ ἐνέπεσεν εἰς αὐτὰς 25 εὐθεῖα ἡ αγ, καί ἐστιν ἡ ὑπὸ αγε γωνία ἴση τῇ ὑπὸ βαγ· ἐναλλὰξ γάρ· ἡ δὲ ὑπὸ εγδ γωνία ἴση τῇ ὑπὸ αβγ, ἡ ἐκτὸς τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη. εἰ γοῦν ἡ μία τοῦ τριγώνου γωνία ἡ ὑπὸ αγβ μετὰ τῶν ἔξω δύο γωνιῶν δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας γωνίας ἐποίει, καὶ μετὰ τῶν λοιπῶν δύο γωνιῶν τοῦ τριγώνου τῶν ἴσων ταῖς ἔξω τὸ αὐτὸ ποιήσει· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

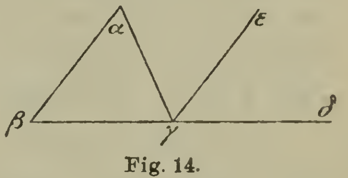


Fig. 14.

30 ὅτι τῶν ἰσοσκελῶν τριγώνων αἱ πρὸς τῇ βάσει γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσιν, οὕτω δὴ κατὰ τὸ πρῶτον διάγραμμα ὁ Εὐκλείδης καὶ κατασκευάζει καὶ ἀποδείκνυσιν.

ὁ μὲν στοιχειωτὴς Εὐκλείδης ἄλλως δείκνυσιν, ὅτι τῶν ἰσοσκελῶν τριγώνων αἱ πρὸς τῇ βάσει γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί. προσεκβάλλει γὰρ τὰς

Euklid I 5.

---

4 εζβ] post ε del. β. 13 τό] τήν. 22 ἡ] om. 24 ἔστω] ἔστι. 31 πρῶτον] immo *πέμπτον τοῦ πρώτου*; cf. Alexander *in Anal. pr.* p. 268, 6 sqq. (ed. Wallies).

---

1 ff. vgl. *Anal. pr.* II p. 66 a 13 (s. oben S. 18). 9 ff. vgl. *Anal. pr.* II p. 67 a 15 usw. (s. oben S. 19).

εὐθείας τοῦ τριγώνου τὰς αβ, αγ καὶ τέμνει ἴσας τῇ αβ καὶ αγ τήν τε βδ καὶ τὴν γε καὶ κοινὴν λαμβάνει τὴν βγ καὶ δύο τρίγωνα ποιεῖ ὑποκάτω τοῦ τριγώνου τὸ βγδ καὶ βγε. καί εἰσιν αἱ βάσεις αὐτῶν αἱ γδ, βε ἴσαι, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ γβδ τῇ ὑπὸ βγε ἴση. καὶ αὖθις ποιεῖ τρίγωνα μεγάλα τὸ αγδ καὶ τὸ αβε· καί ἐστιν ἡ αδ τῇ αε ἴση καὶ ἡ αβ τῇ αγ, καὶ γωνία κοινὴ τῶν δύο τριγώνων μία ἡ ὑπὸ βαγ, καὶ βάσις ἡ βε βάσει τῇ γδ ἴση, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ αβε τῇ ὑπὸ αγδ ἴση, καὶ ἡ πρὸς τῇ δ λοιπὴ λοιπῇ τῇ πρὸς τῇ ε ἴση. ἀλλ' ἐδείχθη καὶ ἡ ὑπὸ εβγ τῇ ὑπὸ βγδ ἴση· ἐὰν οὖν ἀπὸ τῶν ἴσων ἴσα ἀφέλῃς, τὰ καταλειπόμενά εἰσιν ἴσα· ἀπὸ γοῦν τῶν ἴσων γωνιῶν τῆς τε ὑπὸ αβε καὶ τῆς ὑπὸ αγδ ἴσαι γωνίαι ἀφῃρέθησαν αἱ ὑπὸ γβε καὶ ὑπὸ βγδ· ὥστε καὶ αἱ καταλειπόμεναι γωνίαι ἥ τε ὑπὸ αβγ καὶ ἡ ὑπὸ αγβ ἴσαι εἰσὶν ἀλλήλαις· καί εἰσι πρὸς τῇ βάσει τοῦ αβγ τριγώνου. καὶ οὕτω μὲν ὁ Εὐκλείδης· ὁ δέ γε Ἀριστοτέλης διὰ τοῦ κύκλου τὸ τοιοῦτον θεώρημα ἀποδείκνυσιν.

Fig. 15.

Anal. pr. I 41 b 14 sqq.

ἔστω γὰρ κύκλος ὁ αβγ καὶ κέντρον τούτου τὸ δ· αἱ δὲ ἀπὸ τοῦ κέντρου ἠγμέναι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν· ἴση ἄρα ἡ δβ τῇ δγ, καί ἐστιν ἰσοσκελὲς τρίγωνον τὸ δβγ, καί ἐστιν ὡς τομεὺς κύκλου τὸ δβκγ σχῆμα, καί εἰσιν αἱ γωνίαι τούτου ἥ τε ὑπὸ δβκ καὶ ἡ ὑπὸ δγκ ἴσαι. ἐμπεσοῦσα δὲ ἡ βγ εὐθεῖα τέμνει τήν τε πρὸς τῷ β γωνίαν εἰς τὴν ε καὶ τὴν η γωνίαν τήν τε πρὸς τῷ γ εἰς τὴν πρὸς τῷ ζ καὶ εἰς τὴν πρὸς τῷ θ. καί ἐστιν ἡ πρὸς τῷ η γωνία τῇ πρὸς τῷ θ ἴση· παντὸς γὰρ τμήματος κύκλου αἱ δύο γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν, ἔστι δὲ τμῆμα κύκλου τὸ βκγ· λοιπὴ ἄρα ἡ πρὸς τῷ ε γωνία τῇ πρὸς τῷ ζ λοιπῇ γωνίᾳ ἴση ἐστίν· ἐὰν γὰρ ἀπὸ τῶν ἴσων ἴσα ἀφέλῃς, τὰ καταλειπόμενα ἴσα εἰσίν. καί εἰσιν αἱ γωνίαι αὗται ἥ τε πρὸς τῷ ε καὶ ἡ πρὸς τῷ ζ τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου τοῦ δβγ πρὸς τῇ βάσει τῇ βγ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

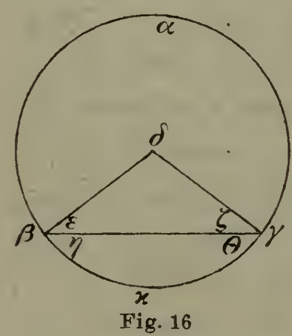


Fig. 16

Aristoteles anal. pr. I 41 a 26.

πῶς ἡ διάμετρος ἀσύμμετρος τῇ πλευρᾷ;

τετραγώνου τοῦ αβγδ ἡ διάμετρος ἡ αγ τῇ πλευρᾷ τῇ αδ ἐστιν ἀσύμ-

---

1 καὶ αγ] τῇ αγ. 13 καὶ ὑπό] καὶ αἱ ὑπό. 24 η] e corr. 28 ἀφέλῃς] ἀφέλῃ.

Euklid nimmt nur $\alpha\delta = \alpha\varepsilon$, nicht $\beta\delta = \alpha\beta = \alpha\gamma = \gamma\varepsilon$. Daß $\beta\varepsilon = \gamma\delta$, wird durch die Kongruenz der Dreiecke $\alpha\gamma\delta$, $\alpha\beta\varepsilon$ bewiesen. Daraus folgt wieder die Kongruenz der Dreiecke $\beta\gamma\delta$, $\beta\gamma\varepsilon$ und aus dieser $\angle\,\delta\beta\gamma = \angle\,\beta\gamma\varepsilon$. In unserem Text ist die Schlußfolgerung auf den Kopf gestellt. 17 sqq. vgl. Alexander *in Anal. pr.* S. 268, 9 ff. (oben S. 25). 32 sqq. vgl. Alexander S. 260, 20 ff.

μετρος· εἰ γὰρ σύμμετρός ἐστι, ἔστι δὲ σύμμετρα μεγέθη τὰ ἔχοντα λόγον, ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν, ἔστω ἡ διάμετρος τέσσαρα, ἡ δὲ πλευρὰ τρία, καὶ τετραγωνιζέσθω ταῦτα, καὶ γίνεται τὸ ἀπὸ τῆς διαμέτρου $\overline{ιϛ}$, τὸ δὲ ἀπὸ τῆς πλευρᾶς $\overline{θ}$. ἀλλὰ 5 τὸ ἀπὸ τῆς διαμέτρου διπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς πλευρᾶς· καὶ ὁ $\overline{ιϛ}$ ἄρα τοῦ $\overline{θ}$ διπλάσιος. ἀλλὰ καὶ τοῦ $\overline{η}$· ὥστε ὁ περιττὸς ὁ $\overline{θ}$ ἴσος ἔσται τῷ ἀρτίῳ τῷ $\overline{η}$· ὅπερ ἀδύνατον. οὐκ ἄρα σύμμετρος ἀλλ' ἀσύμμετρος.

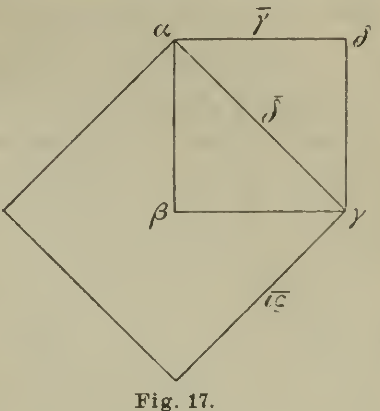


Fig. 17.

Aristoteles Anal. pr. II 69 a 30 sqq.

10 πῶς ὁ κύκλος τετραγωνίζεται;

τετραγωνισθῆναι τὸν κύκλον πάντη χαλεπόν ἐστιν· οὐδὲ γὰρ εὐθύγραμμον ἀλλὰ περιφερόγραμμόν ἐστι· τὰ δὲ εὐθύγραμμα εὐκολώτερον τετραγωνίζονται, ἤγουν τὸ πρόμηκες γίνεται τετράγωνον· τετραγωνισμὸς γάρ ἐστι τὸ εὑρεῖν τὴν πλευράν, ἐξ ἧς τὸ 15 σχῆμα τετραγωνίζεται. οἷον τὰ $\overline{λϛ}$, εἰ μὲν ἐκ τοῦ τετράκις τὰ $\overline{θ}$ γίνονται, προμήκης ἐστί· τὸ μὲν γὰρ πλάτος τούτου $\overline{δ}$, τὸ δὲ μῆκος $\overline{θ}$. εἰ γοῦν θέλομεν τετραγωνίσαι τὸν $\overline{λϛ}$, ζητήσομεν τὴν πλευράν, ἥτις εὕρηται κατὰ γεωμετρικὴν ἀναλογίαν μέσον τοῦ $\overline{δ}$ καὶ τοῦ $\overline{θ}$, καί ἐστιν ὁ $\overline{ϛ}$· ὃν γὰρ λόγον ἔχει ὁ $\overline{θ}$ πρὸς τὸν $\overline{ϛ}$, ὁ $\overline{ϛ}$ πρὸς τὸν $\overline{δ}$· ἡμιόλιος γάρ. καὶ ἑξάκις τὰ $\overline{ϛ}$ $\overline{λϛ}$ 20 γίνονται. τοῦτό ἐστιν ὁ τετραγωνισμὸς καὶ ἐπὶ πάντων τῶν ἀριθμῶν καὶ τῶν σχημάτων. ἐπὶ γοῦν τοῦ κύκλου, ἐπεὶ οὐκ εὐθυγραμμίζεται, οὐκ ἔστι τὸ τετραγωνίσαι αὐτόν. ὅμως τινὲς καὶ τοῦτον ἐπειράθησαν τετραγωνίσαι, ἀλλ' οἱ μὲν ἀποστάντες τῶν οἰκείων γεωμετρικῶν ἀρχῶν, οἱ δὲ ἥψαντο μὲν τῶν ἀρχῶν, οὐ μὴν δὲ καὶ ἐς τέλος ἴσχυσαν ἀποδεῖξαι.

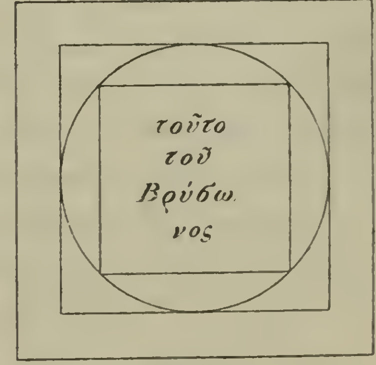


Fig. 18.

Aristoteles Anal. post. I 75 b 40 sqq. Pseudo-Alexander in Soph. elench. S. 90, 10 sqq. (ed. Wallies).

25 αὐτίκα ὁ μὲν Βρύσων ἀρχὰς ὑποθέμενος διαλεκτικὰς γεωμετρικῶς ἐπεχείρει δῆθεν τὸν τοῦ κύκλου ποιεῖν τετραγωνισμόν· ἐτίθει γὰρ κύκλον καὶ περὶ τοῦτον τετράγωνον καὶ ἄλλο ἐνέγραφεν ἐν αὐτῷ τετράγωνον, καὶ ἦν ὁ κύκλος μέσος τῶν 30 δύο τετραγώνων, τοῦ μὲν ἐκτὸς μείων τοῦ δὲ ἐντὸς μείζων. ἐτίθει γοῦν καὶ μέσον τῶν δύο τετραγώνων ἄλλο τετράγωνον καὶ συνῆγεν, ὅτι, ἐπεὶ ὁ κύκλος τοῦ μὲν ἐκτὸς τετραγώνου μείων τοῦ δὲ ἐντὸς μείζων, καὶ τὸ μέσον τετράγωνον ὁμοίως ἔχει πρὸς τὰ τοιαῦτα 35 τετράγωνα, ἄρα τὸ μέσον τετράγωνον καὶ ὁ κύκλος ἴσα εἰσίν.

ἔστι δὲ ὁ λόγος πιθανὸς καὶ διαλεκτικὴ ἡ ἀρχή· οὐδὲ γὰρ ἐξ ἀνάγκης

---

4 $\overline{ιϛ}$] ιʹϛ. 7 ὁ $\overline{θ}$] $\overline{Θ}$ς ($\overline{θ}$ ἀριθμός?). 13 εὐκολώτερον] εὐκο^{τρ}. ἤγουν] ἤγ^{ν}. 17 γεωμετρικὴν] -κ- corr. ex αν. 20 καὶ ἐπί] καί dubium. 25 Βρύσων] Βρ- in ras. 35 ἄρα] ἄρ^{α}ʹ.

ἐστιν, ὅτι, εἰ δύο τινὰ εὕρηνται τοῦ μὲν ἑνὸς μείζονα τοῦ δὲ ἄλλου μείονα, τηνικαῦτα τὰ δύο ταῦτα ἴσα ἐστίν· τὰ $\overline{\zeta}$ γὰρ καὶ τὰ $\overline{\eta}$ τῶν μὲν $\overline{\varsigma}$ πλείονά εἰσι τῶν δὲ $\overline{\iota\epsilon}$ ἐλάττονα, ἀλλ' οὐ παρὰ τοῦτο τὰ $\overline{\zeta}$ καὶ τὰ $\overline{\eta}$ ἴσα εἰσίν.

Aristoteles Soph. elench. 172 a 7. — Themistius in Phys. p. 4, 2 sqq. ed. Schenkl.

ἀλλ' οὕτω μὲν ὁ Βρύσων· ὁ δὲ Ἀντιφῶν πόρρω τῶν γεωμετρικῶν ἀρχῶν γεγονὼς ᾠήθη ποτὲ γενέσθαι τὸ εὐθύγραμμον ἴσον τῷ περιφερογράμμῳ καὶ 5 δυνατὸν εἶναι ἐφαρμόζεσθαι θάτερον θατέρῳ, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον καὶ παρὰ πᾶσαν γεωμετρικὴν μέθοδον. ἐποίει γὰρ κύκλον καὶ ἐν αὐτῷ ἐνέγραφε τρίγωνον, εἶτα πεντάγωνον καὶ ἑξάγωνον καὶ πεντεκαιδεκάγωνον, καὶ ἕως οὗ ἐνεχώρει διαστέλλεσθαι τὴν εὐθεῖαν γραμμὴν τῆς περιφεροῦς γραμμῆς τοῦ κύκλου, πεντηκοντάγωνον 10 καὶ ἑκατοντάγωνον καὶ μάλα ἐπὶ πλέον, ἕως οὗ δόξει ἐφαρμόζεσθαι τὴν εὐθεῖαν τῇ περιφερεῖ· ὃ ἀδύνατόν ἐστιν· εἰ γὰρ καὶ ἡ αἴσθησις πλανᾶται, ἡ ἐπιστήμη οὐ δίδωσι τοῦτο. ἀλλὰ ἐκεῖνος τῇ αἰσθήσει πιστεύων ἐδόκει ὁρᾶν ἐφαρμο- 15 ζομένην εὐθεῖαν περιφερεῖ κἀντεῦθεν λαμβάνων ἀρχήν, ὡς τὸ περιφερὲς ἀπετελέσθη εὐθύγραμμον, ἐπεχείρει τετραγωνίζειν τὸν κύκλον. εἰ γοῦν ἦν τὸ ἡγούμενον, ὅτι γίνεταί ποτε τὸ εὐθὺ ἴσον τῷ περιφερεῖ, καὶ τὸ ἑπόμενον ἂν ἦν· ἀλλὰ σαθροῖς θεμελίοις τὸν λόγον ἐπεχείρει οἰκοδομεῖν. 20



Fig. 19.

ἀλλὰ ταῦτα μὲν καὶ ὁ Ἀντιφῶν, ὃς καὶ φορτικὸς ἐδόκει λέγων οὐκ ἐξ οἰκείων ἀρχῶν τῇ γεωμετρίᾳ.

Aristoteles Soph. elench. 171 b 15. — Philoponos in Phys. p. 31, 3—7 ed. Vitelli. — Simplicius in Phys. I p. 56, 1 sqq. ed. Diels.

τρίτος ἐπὶ τούτοις Ἱπποκράτης ὁ Χῖος ἐπεχείρει τετραγωνίζειν τὸν κύκλον, ὃς ἁλοὺς ἐν θαλάσσῃ παρὰ τῶν Ἀθηναίων καὶ τῶν ἐνόντων αὐτῷ στερηθεὶς ἦλθεν εἰς Ἀθήνας ἀπαιτῶν τὰ ἀφαιρεθέντα, ὡς δὲ οὐκ ἐπετύγχανεν, ὧν ἐπε- 25 ζήτει ἀφεὶς πάντα καὶ ἐς διδασκάλων φοιτήσας ἐξέμαθε τὴν γεωμετρίαν καὶ θαρρῶν τῇ ἕξει ἐκ γεωμετρικῶν ἀρχῶν ἐπεχείρει τετραγωνίζειν τὸν κύκλον. πλὴν οὐδὲ οὗτος εἰς τέλος ἐπετύγχανε τοῦ βουλήματος· ἐλάμβανε γὰρ ἀρχὴν γεωμετρικήν, ὅτι ἐν τοῖς ὀρθογωνίοις τριγώνοις τὸ ἀπὸ τῆς ὑποτεινούσης τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν πλευρῶν τετραγώνοις· ὁμοίως τούτοις καὶ 30 τὸ ἀπὸ τῆς ὑποτεινούσης εἶδος οἱονεὶ ἡμικύκλιον ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν πλευρῶν ἡμικυκλίοις· ἐτίθει γοῦν γραμμὴν τὴν $\overline{\alpha\beta}$ καὶ ἐπ' αὐτῆς συνίστα ἅμα μὲν ἡμικύκλιον τὸ $\overline{\alpha\beta}$ ἅμα δὲ καὶ ὀρθογώνιον τρίγωνον τὸ $\overline{\alpha\gamma\beta}$· καὶ τοῦτο γεωμετρικόν, ὅτι ἐν τοῖς ἡμικυκλίοις 35 ὀρθογώνια συνίστανται τρίγωνα, ὥσπερ ἐν τοῖς ἐλάττοσι τῶν ἡμικυκλίων τμήμασιν ἀμβλυγώνια

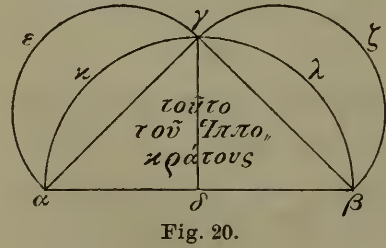


Fig. 20.

15 ἐφαρμοζομένην] -ην e corr. 29 ὑποτεινούσης] ἀποτεινούσης. Fig. bis, in altera: τοῦ ἱπποκράτους. 33 ἐπ'] potest legi etiam ἀπ'. 36 ὀρθογώνια] ὀρθογόνια.

ἐν δέ γε τοῖς μείζοσι τῶν ἡμικυκλίων ὀξυγώνια τρίγωνα. ἐλάμβανε γοῦν τὸ
ἡμικύκλιον εἶδος συνιστάμενον ἀπὸ τῆς ὑποτεινούσης τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου,
ἀπὸ δὲ τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου συνίστα δύο ἕτερα ἡμικύκλια, καὶ ἰδοὺ
κατὰ μέθοδον γεωμετρικὴν ὅλον τὸ ἀπὸ τῆς ὑποτεινούσης ἡμικύκλιον τοῖς
5 δυσὶν ἡμικυκλίοις τοῖς ἀπὸ τῶν πλευρῶν ἴσον ἦν. διῄρει δὲ τὸ ὀρθογώνιον
τρίγωνον εἰς ἴσα δύο τρίγωνα διὰ τῆς εὐθείας τῆς $\overline{\gamma\delta}$ τὰ $\overline{\alpha\gamma\delta}$, $\overline{\gamma\delta\beta}$. ἦν οὖν
τὸ ὅλον ἡμικύκλιον ἴσον τοῖς δυσὶ τμήμασι τούτου, ἤγουν τὸ $\overline{\alpha\gamma\beta}$ τῷ $\overline{\gamma\alpha\delta}$
καὶ τῷ $\gamma\delta\beta$· ἦν δὲ τοῦτο τὸ ἡμικύκλιον ἴσον καὶ τοῖς ἡμικυκλίοις τοῖς ἀπὸ
τῶν πλευρῶν τῷ τε $\overline{\gamma\varepsilon\alpha}$ καὶ τῷ $\gamma\zeta\beta$· ὥστε τό γε $\overline{\gamma\kappa\alpha\delta}$ τμῆμα ἴσον εἶναι τῷ
10 $\overline{\gamma\varepsilon\alpha}$ ἡμικυκλίῳ, τὸ δὲ $\gamma\delta\beta\lambda$ τμῆμα ἴσον τῷ $\gamma\zeta\beta$ ἡμικυκλίῳ. κοινὸν ἀφῃ-
ρήσθω τὸ $\overline{\kappa}$ τμῆμα ἀπό τε τοῦ $\overline{\gamma\varepsilon\alpha\delta}$ τμήματος καὶ ἀπὸ τοῦ $\overline{\gamma\varepsilon\alpha}$ ἡμικυκλίου,
καὶ τὸ $\overline{\lambda}$ τμῆμα αὖθις κοινὸν ἀφῃρήσθω ἀπό τε τοῦ $\overline{\gamma\delta\beta\zeta}$ τμήματος καὶ τοῦ
$\overline{\gamma\zeta\beta}$ ἡμικυκλίου· ἐναπελείφθη ἄρα ὁ μὲν $\overline{\gamma\varepsilon\alpha}$ μηνίσκος ἴσος τῷ εὐθυγράμμῳ
τριγώνῳ τῷ $\overline{\gamma\alpha\delta}$, ὁ δὲ $\overline{\gamma\zeta\beta}$ μηνίσκος τῷ εὐθυγράμμῳ τριγώνῳ ἴσος τῷ $\gamma\delta\beta$,
15 καὶ εὕρηται εὐθύγραμμον τρίγωνον ἴσον περιφερογράμμῳ τῷ μηνίσκῳ. εἰ γοῦν
εὕρηται ἴσον εὐθύγραμμον περιφερογράμμῳ, καὶ κύκλος εὑρεθήσεται ἴσος τῷ
εὐθυγράμμῳ, τούτου δὲ γενομένου ῥαδίως ὁ κύκλος τετραγωνισθήσεται· ὡς
γὰρ ὁ μηνίσκος πρὸς τὸ εὐθύγραμμον, ὅλος διόλου περιφερόγραμμος, ὧν καὶ
ἅπας ὁ κύκλος, πρὸς τὸ εὐθύγραμμον. τοῦτο δὲ οὐκ ἐξ ἀνάγκης· οὐ γάρ,
20 εἰ ἐπὶ μέρους οὕτω, καὶ ἐπὶ παντός· βῶλον γὰρ μέρος γῆς δυνάμεθα φέρειν,
οὐ μὴν δὲ καὶ ἅπασαν γῆν, καὶ μέρος ἀέρος ἀναπνέομεν, οὐ μὴν δὲ καὶ
πάντα ἀέρα, ὡς Ἀριστοτέλης φησίν. *Topica V 135 a 32 sqq*

πῶς οἱ δύο κύβοι εἷς κύβος γενήσεται; *Anal. post. I 75 b 13.*

ἔστω κύβος ὁ $\overline{\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon\zeta\eta\vartheta}$ $\overline{\iota\beta}$ γραμμὰς ἴσας ἔχων, ἓξ ἐπίπεδα καὶ $\overline{\eta}$ στε-
25 ρεὰς γωνίας, ὃς καὶ ἁρμονία λέγεται, διότι τὰ τρία ταῦτα τὴν ἁρμονικὴν σώ- *Nikomachos Arithm. II 29.*
ζουσιν ἀναλογίαν $\overline{\iota\beta}^{\delta}\,\overline{\eta}^{\beta}\,\overline{\varsigma}$· ὃν γὰρ λόγον ἔχει ὁ $\overline{\iota\beta}$ πρὸς τὸν $\overline{\varsigma}$ ὁ μείζων
πρὸς τὸν ἐλάττονα, τὸν αὐτὸν λόγον ἔχει καὶ ἡ ὑπεροχὴ τοῦ μείζονος πρὸς
τὸν μέσον πρὸς τὴν ὑπεροχὴν τοῦ μέσου πρὸς τὸν ἐλάττονα· ἔστι δὲ ὁ λόγος
τοῦ $\overline{\iota\beta}$ πρὸς τὸν ἓξ διπλάσιος, ἔτι καὶ ἡ ὑπεροχὴ τοῦ
30 μείζονος πρὸς τὸν μέσον $\overline{\delta}$, ἡ δ' ὑπεροχὴ τοῦ μέσου πρὸς
τὸν ἐλάττονα $\overline{\beta}$, ὁ $\overline{\delta}$ δὲ πρὸς τὸν δύο διπλάσιος, καὶ διὰ
τοῦτο λέγεται ὁ κύβος ἁρμονία. ὅτι δὲ οἱ $\overline{\beta}$ κύβοι κύβος
εἷς, αἰνίττεται τὴν πολυθρύλλητον ἱστορίαν· Ἀθηναίοις *Pseudo-Psellus De quattuor disciplinis (Venetiis 1532) S. (61) sqq.*
γὰρ λοιμώξασιν ἔχρησεν ὁ θεὸς ἀπαλλαγήσεσθαι τοῦ λοι-
35 μοῦ, εἰ τὸν βωμὸν αὐτοῦ διπλασιάσουσιν· ἦν δὲ οὗτος κύβος· οἱ δὲ λαβόντες
ἕτερον κύβον ἴσον ἐπιτεθείκασι τῷ βωμῷ, τοῦ λοιμοῦ δὲ μὴ παυσαμένου

Fig. 21.

---

7 ἤγουν] ἤγ. $\overline{\gamma\alpha\delta}$] -δ corr. ex β, supra γα- add. κ (uoluit $\overline{\gamma\kappa\alpha\delta}$). 8 $\overline{\gamma\delta\beta}$] supra -β add. λ (h. e. $\overline{\gamma\delta\beta\lambda}$). 11 $\overline{\gamma\varepsilon\alpha\delta}$] immo $\overline{\gamma\kappa\alpha\delta}$. 12 $\gamma\delta\beta\zeta$] immo $\overline{\gamma\delta\beta\lambda}$. 15 τρίγωνον] immo τὸ τρίγωνον. 18 διόλου] διό$^{\lambda}$. 19 οὐ] e corr. 24 $\overline{\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon\zeta\eta\vartheta}$] $\overline{\alpha\beta\gamma'\delta'}\,\overline{\varepsilon\zeta\eta'\vartheta'}$. 26 $\iota'\beta^{\delta}\,\overline{\eta}^{\beta}\,\varsigma'$. 29 ιβ'. 30 $\overline{\delta}$] δ'. 31 $\overline{\beta}$] β'. $\overline{\delta}$] δ'. 33 ἱστορ.'

ἔχρησεν ὁ θεὸς μὴ πεποιηκέναι αὐτοὺς τὸ προσταχθέν· ὁ μὲν γὰρ προσέταξε διπλασιάσαι τὸν βωμόν, οἱ δὲ κύβον ἐπὶ κύβῳ ἐπέθηκαν· καὶ ἦλθον πρὸς Πλάτωνα λέγοντες· πῶς ἂν τὸν κύβον διπλασιάσομεν; ὁ δὲ Πλάτων ἢ ὁ Σωκράτης κάλλιον πρὸς αὐτούς φησιν· ἔοικεν ἡμῖν ὀνειδίζειν ὁ θεὸς ὡς ἀμελοῦσι γεωμετρίας· τὴν δὲ τοῦ κύβου διπλασίασιν εὑρεθῆναί φησιν, εἰ δύο 5 εὐθείαις δύο μέσαι ἀνάλογον εὑρεθῶσι, καὶ τοῦτο τὸ πρόβλημα τοῖς μαθηταῖς προυβάλετο, καί τινες τῶν μαθητῶν περὶ τῆς τούτων εὑρέσεως γεγράφασιν.

Euklid VI 20 coroll. 2. ὁ μὲν γὰρ γεωμέτρης ἔδειξεν, ὅτι τριῶν εὐθειῶν ἀνάλογον οὐσῶν, ὡς ἔχει ἡ πρώτη πρὸς τὴν τρίτην, οὕτω τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης ἀναγραφόμενον τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας. 10

η δ β
γ
α β

Fig. 22.

ἔστωσαν γοῦν τρεῖς εὐθεῖαι αἱ $\overline{\alpha}$, $\overline{\beta}$, $\overline{\gamma}$ ὀκτώ, τέσσαρα, δύο μέτρα ἔχουσαι. ὁ γοῦν ὀκτὼ τῶν δύο τετραπλάσιος καὶ τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης τετράγωνον· ὀκτάκις γὰρ ὀκτὼ $\overline{\xi\delta}$· πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας· τετράκις γὰρ $\overline{\delta}$ $\overline{\iota\varsigma}$· τετραπλάσιον.

οὕτω μὲν οὖν ἐν τοῖς ἐπιπέδοις ἔδειξεν ὁ γεωμέτρης· ἀλλ' ὀργανικώτερον 15 ἐκθησόμεθα κατὰ γραφήν, καθά φησι Παρμενίων, Ἀπολλωνίου τοῦ Περγαίου.

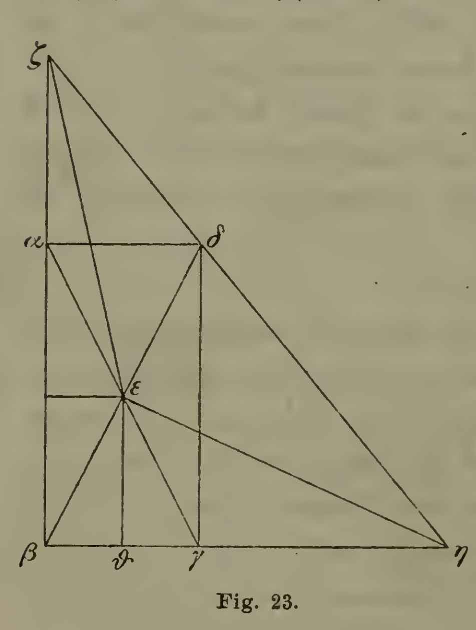


Fig. 23.

ἔστωσαν αἱ δοθεῖσαι εὐθεῖαι αἱ $\overline{\alpha\beta}$, $\overline{\beta\gamma}$, καὶ ἔστω διπλασία ἡ $\overline{\alpha\beta}$ τῆς $\overline{\beta\gamma}$, ὧν δεῖ δύο μέσας ἀνάλογον προσευρεῖν.

καὶ συμπληρούσθω τὸ $\overline{\alpha\gamma}$ παραλληλό- 20 γραμμον ὀρθογώνιον, καὶ ἤχθωσαν διαγώνιοι αἱ $\overline{\alpha\gamma}$, $\overline{\beta\delta}$, καὶ ἐκβεβλήσθωσαν αἱ $\overline{\alpha\beta}$, $\overline{\beta\gamma}$ ἐπὶ τὰ $\overline{\zeta}$, $\overline{\eta}$, καὶ διὰ τοῦ $\overline{\delta}$ σημείου ἐφηρμόσθω ἡ $\overline{\zeta\eta}$ εὐθεῖα, ὡς ἴσην γενέσθαι τὴν $\overline{\varepsilon\zeta}$ τῇ $\overline{\varepsilon\eta}$. λέγω οὖν, ὅτι τῶν $\overline{\alpha\beta}$, $\overline{\beta\gamma}$ εὐθει- 25 ῶν δύο μέσαι ἀνάλογόν εἰσιν αἱ $\overline{\gamma\eta}$, $\overline{\alpha\zeta}$.

ἤχθω γὰρ ἀπὸ τοῦ $\overline{\varepsilon}$ ἐπὶ τὴν $\overline{\beta\gamma}$ εὐθεῖαν παράλληλος τῇ $\overline{\alpha\beta}$ ἡ $\overline{\varepsilon\vartheta}$. καὶ ἐπεὶ ἰσοσκελὲς τρίγωνόν ἐστι τὸ $\overline{\beta\varepsilon\gamma}$, καὶ πρὸς ὀρθὰς τῇ $\overline{\beta\gamma}$ ἡ $\overline{\varepsilon\vartheta}$, ἴση ἄρα ἡ $\overline{\beta\vartheta}$ τῇ $\overline{\vartheta\gamma}$. 30

---

7 προυβάλετο] corr. ex προυβάλλετο. 9 πρώτη] α'. 11 $\overline{\alpha}$, $\overline{\beta}$, $\overline{\gamma}$] α'β'γ'. 14 $\overline{\delta}$] δ'. 17 $\beta\overline{\gamma}$] β'γ'. 18 $\overline{\alpha\beta}$] αβ'. $\beta\overline{\gamma}$] βγ'. 20 $\overline{\alpha\gamma}$] α'γ'. 22 $\overline{\alpha\gamma}$, $\overline{\beta\delta}$] α'γ'βδ'. 23 ἐφηρμόσθω] ἐφαρμόσθω. 25 $\overline{\alpha\beta}$, $\beta\overline{\gamma}$] αβ'βγ'. 27 $\beta\overline{\gamma}$] β'γ'. 28 $\overline{\varepsilon\vartheta}$] ε'θ'. 29 $\beta\overline{\varepsilon\gamma}$] β'εγ'. 30 $\vartheta\overline{\gamma}$] θ'γ'.

---

16 Παρμενίων] vgl. Philoponos *in Anal. post.* I S. 24 (ed. Ald.) = *Apollonios* II S. 105 (ed. Heiberg), wo aber der Beweis ein anderer ist. Der hier vorliegende stimmt mit dem Herons (Eutokios *in Archimedem* III S. 70 ff). Fig. 23, worauf εη unrichtig eine gebrochene Linie ist, deren erste Strecke die Seite δγ halbiert, folgt etwas weiter unten (f. 203ʳ am Schluß) bei αὕτη ἐστὶν ἡ καταγραφή usw. (s. unten S. 45, 28); am Rande steht dabei: ζήτει ἔμπροσθεν τὴν

ἐπεὶ οὖν ἡ βγ τέτμηται δίχα κατὰ τὸ θ, πρόσκειται δὲ αὐτῇ εὐθεῖα ἐπ' [Euklid II 6].
εὐθείας ἡ γη, τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν βη, ηγ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς θγ ἴσον ἐστὶ τῷ
ἀπὸ τῆς θη. κοινὸν προσκείσθω τὸ ἀπὸ τῆς εθ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν βηγ μετὰ
τῶν ἀπὸ τῶν γθ, θε ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν εθ, θη. ἀλλὰ τοῖς μὲν ἀπὸ
5 τῶν γθ, θε ἴσον τὸ ἀπὸ τῆς γε, τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν εθ, θη ἴσον τὸ ἀπὸ τῆς
εη. διὰ τὰ αὐτὰ δὲ καὶ τῷ ὑπὸ τῶν βζ, ζα μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς εα ἴσον τὸ
ἀπὸ τῆς εζ. ἴση δὲ καὶ ἡ εζ τῇ εη· καὶ τὸ ὑπὸ τῶν βη, ηγ ἄρα μετὰ
τοῦ ἀπὸ τῆς γε ἴσον ἐστὶ τῷ τε ὑπὸ βζ, ζα καὶ τῷ ἀπὸ τῆς αε. ἀλλὰ τὸ
ἀπὸ τῆς εγ ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς εα· ἴσαι γάρ· λοιπὸν ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν βη, ηγ
10 ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν βζ, ζα. καὶ ἐπεὶ δέδεικται ἐν τῷ ιδ' τοῦ ϛ', ὅτι τῶν Euklid VI 14.
ἴσων καὶ ἰσογωνίων παραλληλογράμμων ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ αἱ περὶ
τὰς ἴσας γωνίας, ἔστιν ἄρα, ὡς ἡ βζ πρὸς τὴν βη, οὕτως ἡ γη πρὸς τὴν
αζ. ἀλλ' ὡς ἡ βζ πρὸς τὴν βη, οὕτως ἥ τε ζα πρὸς τὴν αδ καὶ ἡ γδ
πρὸς τὴν γη· καὶ ὡς ἄρα ἡ γδ πρὸς τὴν γη, οὕτως ἡ γη πρὸς τὴν αζ
15 καὶ ἡ αζ πρὸς τὴν αδ. καί ἐστι τῇ μὲν δγ ἴση ἡ αβ, τῇ δὲ αδ ἴση ἡ βγ·
καὶ ὡς ἄρα ἡ αβ πρὸς τὴν γη, οὕτως ἡ ηγ πρὸς τὴν αζ καὶ ἡ αζ πρὸς
τὴν βγ. δύο ἄρα δοθεισῶν εὐθεῖων τῶν αβ, βγ εὕρηνται δύο μέσαι ἀνά-
λογον αἱ γη, ζα.

πῶς δεῖ στερεὸν στερεῷ πολλαπλασιάσαι.

20 ἔστωσαν δύο εὐθεῖαι αἱ α, β, καὶ ἔστω διπλασίων ἡ α τῆς β, καὶ
εἰλήφθωσαν τῶν α, β δύο μέσαι ἀνάλογον αἱ γ, δ, ὥστε εἶναι, ὡς τὴν α
πρὸς τὴν γ, οὕτως καὶ τὴν γ πρὸς τὴν δ καὶ τὴν δ πρὸς τὴν β. λέγω, ὅτι
διπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς γ τὸ ἀπὸ τῆς α.

ἐπεὶ ἡ α πρὸς τὴν β τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ α πρὸς τὴν γ· τὰ
25 γὰρ ὅμοια στερεὰ πρὸς ἄλληλα ἐν τριπλασίονι λόγῳ ἐστὶ τῶν ὁμολόγων πλευ- [Euklid XI 33].
ρῶν· ἔστιν ἄρα, ὡς ἡ α πρὸς τὴν β, οὕτω τὸ ἀπὸ τῆς α πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς γ.
διπλασίων δὲ ἡ α τῆς β· διπλάσιον ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς α τοῦ ἀπὸ τῆς γ.

αὕτη ἐστὶν ἡ καταγραφὴ τοῦ θεωρήματος, ἐν ᾗ δείκνυται, ὅτι, ὡς ἡ αβ
πρὸς τὴν γη, ἡ γη πρὸς τὴν ζα καὶ αὕτη πρὸς τὴν βγ. καὶ ὡς ἡ αβ

---

2 τῷ] τό. 3 τῶν] τῆς?*) 4 γθ] εθ. 5 τῶν (pr.)] τῆς? τοῖς] e corr. τῶν (alt.)] τῆς? 6 Post εη desunt: τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν βη, ηγ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς γε ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς εη. τῶν] τῆς? 7 εζ (pr.)] αζ. ηγ] inc. f. 203r. 9 τῷ] corr. ex τό. 10 τῷ (pr.)] τό. ὑπό] ἀπό. τῶν] τῆς? ϛ'] ϛ. 17 δοθεισῶν] -ῶν e corr. εὕρηνται] εὕρηται. 23 τοῦ ἀπὸ τῆς γ] sc. στερεοῦ (γ^3), und so im folgenden. 28 Hier Figur 23.

καταγραφήν, und fol. 203v wird nebst anderen Figuren (s. unten) diese vergrößert wiederholt; nur sind εζ und εη in derselben Weise falsch gezeichnet wie hier εη, und auf βζ und βη sind zwei Rechtecke hinzugefügt; bei αζ steht: ἡ τρίτη, bei αβ: ἡ πρώτη, bei βγ: ἡ τετάρτη, bei γη: ἡ δευτέρα, beim Rechteck auf βζ oben: αὕτη ἡ ζα, bei dem auf βη rechts: αὕτη ἡ γη.

*) Die Kompendien für τῆς und τῶν sind nicht zu unterscheiden.

πρὸς τὴν $\overline{\beta\gamma}$, οὕτω τὸ ἀπὸ τῆς $\overline{\alpha\beta}$ στερεὸν πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς $\overline{\gamma\eta}$. ἀλλʼ ἡ $\overline{\alpha\beta}$ πρὸς τὴν $\overline{\beta\gamma}$ διπλασίων· καὶ ὁ ἀπὸ τῆς $\overline{\alpha\beta}$ ἄρα κύβος διπλασίων τοῦ ἀπὸ τῆς $\overline{\gamma\eta}$ κύβου. τοῦ γοῦν παρόντος κύβου ἔχοντος πλευρὰν τὴν $\overline{\gamma\eta}$ οὕτω διπλασιασθήσεται ὁ τοιοῦτος κύβος, εἴπερ δέξεται πλευρὰν τὴν $\overline{\alpha\beta}$. ὡς γὰρ ἐν ἐπιπέδοις κατὰ τρεῖς ὅρους γίνεται τὸ τοιοῦτον· οἷον ἔστωσαν γραμμαὶ 5 τρεῖς $\bar{\alpha}$, $\bar{\beta}$, $\bar{\gamma}$ ἔχουσαι $\overline{\iota\beta}$ $\bar{ϛ}$ $\bar{\gamma}$, ὡς ὁ $\overline{\iota\beta}$ πρὸς τὸν $\bar{\gamma}$· τετραπλάσιος γάρ· οὕτω τὸ ἀπὸ τῆς $\bar{\alpha}$ ἐπίπεδον τοῦ ἀπὸ τῆς $\bar{\beta}$ ἐπιπέδου· δωδεκάκις γὰρ τὰ $\overline{\iota\beta}$ $\overline{\rho\mu\delta}$ καὶ ἑξάκις τὰ $\bar{ϛ}$ $\overline{\lambda ϛ}$· τετραπλάσιον ἄρα· ὡς γοῦν οὕτω ἐν ἐπιπέδοις διὰ τριῶν ὅρων, οὕτω διὰ τῶν $\bar{\delta}$ ἐν στερεοῖς, ὡς ἡ πρώτη γραμμὴ πρὸς τὴν δʹ, οὕτω τὸ ἀπὸ τῆς 10 πρώτης στερεὸν πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας στερεόν. ὡς γοῦν ἐπὶ τοῦ διπλασίου οὕτως, οὕτω χάριν παραδείγματος καὶ ἐπὶ τοῦ ὀκταπλασίου τὸ τοιοῦτον· ἔστωσαν $\bar{\delta}$ γραμμαὶ αἱ $\bar{\alpha}$, $\bar{\gamma}$, $\bar{\delta}$, $\bar{\beta}$ ἔχουσαι ἀριθμοὺς $\overline{\iota ϛ}$ $\bar{\eta}$ $\bar{\delta}$ $\bar{\beta}$, ὡς ἡ $\bar{\alpha}$ πρὸς τὴν $\bar{\beta}$· ὀκταπλάσιος γάρ· οὕτω τὸ ἀπὸ τῆς $\bar{\alpha}$ στερεόν, ἤγουν ὁ κύβος, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς $\bar{\gamma}$ στερεόν, ἤγουν τὸν κύβον· 15 ἐν γὰρ τῇ αὐτῇ ἀναλογίᾳ αἱ $\bar{\delta}$ εἰσι γραμμαί· κατὰ γὰρ τριπλασίονα λόγον· καὶ γίνεται τὸ ἀπὸ τῆς $\bar{\alpha}$ στερεὸν ὀκταπλάσιον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς $\bar{\gamma}$· ἡ γὰρ $\bar{\alpha}$ πρὸς τὴν $\bar{\beta}$ ὀκταπλασίων· ἑξακαιδεκάκις γὰρ τὰ $\overline{\iota ϛ}$ $\overline{\sigma\nu ϛ}$, καὶ πάλιν ἑξακαιδεκάκις τὰ $\overline{\sigma\nu ϛ}$ κύβος ὁ ͵$\overline{\delta ϙ ϛ}$· οὕτω γὰρ ὁ κύβος ἀναδιπλασιάζεται. καὶ αὖθις ὀκτάκις τὰ $\bar{\eta}$ $\overline{\xi\delta}$ 20 καὶ ὀκτάκις τὰ $\overline{\xi\delta}$ κύβος ὁ $\overline{\varphi\iota\beta}$· ἔστι δὲ ὁ ͵$\overline{\delta ϙ ϛ}$ κύβος ὀκταπλάσιος τοῦ $\overline{\varphi\iota\beta}$ κύβου. ὡς γοῦν ἐπὶ τοῦ ὀκταπλασίου, οὕτω λάμβανε καὶ ἐπὶ τοῦ τετραπλασίου καὶ διπλασίου καὶ ἐπὶ πάντων.

Fig. 24.

Fig. 25.

εἰς τὴν αὐτὴν καταγραφὴν καὶ ταῦτα.

ὡς ἡ $\overline{\zeta\beta}$ ὅλη πρὸς τὴν $\overline{\beta\eta}$ ὅλην, οὕτω καὶ ἡ $\overline{\eta\gamma}$ πλευρὰ πρὸς τὴν $\overline{\zeta\alpha}$ 25 πλευράν· καὶ γὰρ ἴσα καὶ ὅμοιά εἰσι παραλληλόγραμμα τὸ ὑπὸ τῶν $\overline{\zeta\beta}$, $\overline{\beta\alpha}$ καὶ τὸ ὑπὸ τῶν $\overline{\beta\eta}$, $\overline{\eta\gamma}$. ἔστω γὰρ ἐν τοῖς ὀκταπλασίοις στερεοῖς διὰ τῶν

---

2 καί] inc. f. 203ᵛ. 5 τοιοῦτον] hier ϐ, die Figur mit demselben Zeichen unten (dabei: ἐν τοῖς ἐπιπέδοις). 13 τοιοῦτον] τοιοῦτον ∾. $\bar{\delta}$ (pr.)] δʹ. $\overline{\iota ϛ}$] ιϛʹ. 14 $\bar{\alpha}$] αʹ. $\bar{\beta}$] β⁶ (h. e. δευτέραν). 15 ἤγουν] ἤ^{γ}. ἤγουν] ἤ^{γ}. 16 $\bar{\delta}$] δʹ. 19 ͵$\overline{\delta ϙ ϛ}$] ͵δ corr. ex γ. 21 ὀκταπλάσιος] ὀκταπλā. 23 τετραπλασίου] τετραπλ^{α}/. διπλασίου] διπλāσ. 25 $\overline{\eta\gamma}$] $\bar{\gamma}$. 26 τὸ ὑπό] postea insertum. τῶν] τῆς. 27 τῶν] τῆς. στερεοῖς—πλευρῶν] in mg. postea additum.

Die Figur unten mit dem Zeichen ∾ (vgl. zu Z. 5). Mit ἀνα- Z. 16 schließt f. 203ᵛ medio. Der übrige Teil der Seite enthält die beiden letzten Figuren und die S. 45 erwähnte mit der Beischrift: ἀποδείκνυται διὰ γραμμῆς τμηθείσης δίχα καὶ προσκειμένης ἐπʼ εὐθείας ἑτέρας, διὰ τῆς νύμφης, διὰ τῆς ἀντιπεπονθήσεως τῶν ἴσων ὀρθογωνίων καὶ διὰ τῆς διαιρέσεως (corr. ex διαιρετικῆς) τῶν $\overline{\zeta\beta}$, $\overline{\beta\eta}$. Daneben nebenstehende Figur mit Beischrift: ἐν τοῖς στερεοῖς ἐπὶ διπλασίου. 24 καταγραφήν] s. oben S. 45, 28 ff.).

Fig. 26.

διπλασίων πλευρῶν ἡ $\overline{ζβ}$ μοιρῶν $\overline{κ}$· καὶ τετράκις τὴ $\overline{κ}$ $\overline{π}$· ἡ δὲ $\overline{βη}$ μοιρῶν $\overline{ι}$, ἡ δὲ $\overline{ηγ}$ μοιρῶν $\overline{η}$· καὶ ὀκτάκις τὰ $\overline{ι}$ $\overline{π}$. λοιπὸν ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ τῶν τοιούτων, ὡς ἡ $\overline{ζβ}$ ἡ μείζων πλευρὰ πρὸς τὴν $\overline{βη}$ τὴν μείζονα πλευρὰν τοῦ ἑτέρου ὀρθογωνίου καὶ τούτου ἡ ἐλάττων πλευρὰ ἡ $\overline{γη}$ πρὸς τὴν ἐκείνου
5 ἐλάττονα πλευρὰν τὴν $\overline{ζα}$, ὡς τὰ $\overline{κ}$ πρὸς τὰ $\overline{ι}$, τὰ $\overline{η}$ πρὸς τὰ $\overline{δ}$. καὶ διαιροῦντι ἄρα, ὡς ἡ $\overline{ζβ}$ πρὸς τὴν $\overline{βη}$, τὰ $\overline{κ}$ πρὸς τὰ $\overline{ι}$, καὶ ἡ $\overline{αβ}$ πρὸς τὴν $\overline{γη}$ τὰ $\overline{ις}$ πρὸς τὰ $\overline{η}$, καὶ ἡ $\overline{ζα}$ τὰ $\overline{δ}$ πρὸς τὴν $\overline{βγ}$ τὰ δύο· καὶ γέγονεν ἡ τῶν $\overline{δ}$ μεγεθῶν ἀναλογία. ἔστι δὲ ἐν ὀκταπλασίοις στερεοῖς· ὡσαύτως ἄρα καὶ ἐν τοῖς διπλασίοις στερεοῖς.

10 περὶ τῶν ἐν τῇ διαλεκτικῇ κατ' ἀρχὰς ψευδογραφημάτων. *Topica I 1 101 a 15.*

φησὶν ὁ γεωμέτρης· παντὸς τριγώνου αἱ δύο πλευραὶ τῆς μιᾶς μείζους εἰσὶ πάντη μεταλαμβανόμεναι· τὸ δὲ θεώρημα τοῦτο καὶ ὄνον καλοῦσιν, ὅτι δῆλον τοῦτο καὶ τῷ ὄνῳ· εἴ τις θήσει χόρτον ἐν μιᾷ γωνίᾳ τοῦ τριγώνου καὶ στήσει τὸν ὄνον ἐν τῇ ἑτέρᾳ κατ' ἀντικρύ, ἐκεῖνος κατ' εὐθὺ τὴν μίαν
15 γραμμὴν ὡς μικροτέραν κινηθήσεται ἢ τὰς δύο γραμμὰς τοῦ τριγώνου. ὁ γοῦν ψευδογράφος χρᾶται μὲν ταῖς ἀρχαῖς τῆς γεωμετρίας, τέως δὲ ψευδογραφῶν τὸ σχῆμα διὰ τῶν τοιούτων ἀληθινῶν ἀρχῶν τὸ ἐναντίον τῇ γεωμετρίᾳ συνάγει, ὡς ἐνταῦθα διὰ ἀρχῆς γεωμετρικῆς, ὅτι αἱ ἀπὸ τοῦ κέντρου πρὸς τὴν περιφέρειαν ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν, ψευδογραφῶν καὶ χρώμενος τῇ
20 αὐτῇ ἀρχῇ δεικνύει ταῖς δυσὶ πλευραῖς τοῦ τριγώνου τὴν μίαν ἴσην ἢ καὶ μείζονα τούτων. *Euklid I 20. Proklos in Elem. p. 322, 4 ff.*

ἢ ἐν τῷ γράφειν μὴ ὡς δεῖ τὰ ἡμικύκλια ἢ ἐν τῷ γραμμὰς ἄγειν οὐχ ὡς ἂν ἀχθείησαν. *Aristoteles Top. 101 a 15—16.*

τὰ μὲν ἡμικύκλια οὐχ ὡς δεῖ γράφει, εἴπερ θήσει ἡμικύκλιον τὸ $\overline{αδκε}$
25 καὶ ἕτερον ἡμικύκλιον τὸ $\overline{εκζβ}$ καὶ γραμμὴν θήσει ὡς διάμετρον αὐτῶν τὴν *Alexander in Top. p. 24 ed. Wallies.*

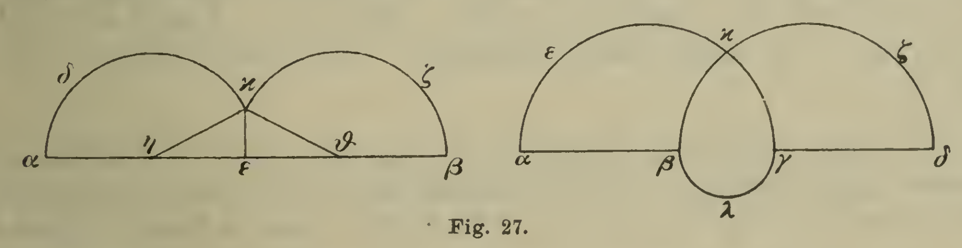


Fig. 27.

$\overline{αεβ}$, κέντρον δὲ τό τε $\overline{η}$ καὶ $\overline{θ}$, καὶ λέγει τὴν $\overline{ηκ}$ ἴσην τῇ $\overline{θκ}$, τὴν δὲ $\overline{ηε}$ ἴσην τῇ $\overline{εθ}$· ἐκ τοῦ κέντρου γάρ· καὶ σύναμα ἄρα ἡ $\overline{ηεθ}$, ἥτις ἐστὶ μία

1 μοιρῶν $\overline{κ}$] deinde deest: ἡ δὲ $\overline{ζα}$ μοιρῶν $\overline{δ}$. $\overline{ι}$] ι'. 8 $\overline{δ}$] δ'. 10 κατ' ἀρχάς] supra scr. 14 στήσει] στήσῃ. 15 μικροτέραν] μικρο^τρ'. 16 χρᾶται] sic. δέ] om. 26 $\overline{ηε}$] corr. ex $\overline{εη}$.

9 Mit στερεοῖς schließt f. 204ʳ med., der Rest der Seite leer. 10 ff. f. 204ᵛ. Der Figur 27 links ist beigeschrieben: τοῦτό ἐστι τὸ θεώρημα, ὃ καλεῖται ὄνος. Im Anfang des Kommentars zur *Topik* findet sich folgende Stelle: δεικνύων

ὑποτείνουσα τοῦ τριγώνου, σύναμα ταῖς ἑτέραις δυσὶ πλευραῖς τοῦ τριγώνου ταῖς ηκ, κϑ ἴση· ὥστε ἡ μία ταῖς δυσὶν ἴση. ἄγει δὲ γραμμὰς οὐχ ὡς ἂν ἀχϑείησαν ἐν τῷ περιγράψαι μὲν ὡς δεῖ τὰ ἡμικύκλια τό τε αεγ καὶ τὸ βζδ καὶ κατάγειν μὲν ἐκ τοῦ κ ἐπὶ τὰ β, γ τὰς δύο τοῦ τριγώνου πλευράς, τὴν δὲ γραμμὴν τὴν αβγδ μὴ ὡς δεῖ γράφειν, ἀλλ' ὡς τὴν αβλγδ· καὶ 5 ἔσται ἡ αλγ ἡ περιφερὴς ὡς εὐϑεῖα καὶ ἢ ἴση ταῖς δύο βκ, γκ ἢ καὶ μείζων ἡ μία τῶν δύο.

πῶς αἱ παράλληλοι οὐ συμπίπτουσιν.

Aristoteles Anal. pr. II 65 a 4 sqq. οἱ τὰς παραλλήλους γράφοντες διάλληλον δεῖξιν ποιοῦσι· τὸ γὰρ τρίγωνον διὰ τῶν παραλλήλων ἀποδεικνύουσι καὶ τὰς παραλλήλους πάλιν, ὅτι οὐ 10 συμπίπτουσι, διὰ τῶν γωνιῶν τοῦ τριγώνου δεικνύουσιν ἐν τῇ δι' ἀδυνάτου δείξει. εἰ γὰρ συμπεσοῦνται αἱ παράλληλοι, ἕξει τὸ τρίγωνον δύο ὀρϑὰς καὶ πλέον τὰς α, β καὶ τὴν πρὸς τῷ γ γωνίαν πρὸς ταύταις. ἀλλὰ μὴν τὸ ἑπόμενον ἀδύνατον· τὸ ἡγούμενον ἄρα ἄτοπον, ὅτι συμ- 15 πίπτουσί ποτε αἱ παράλληλοι.

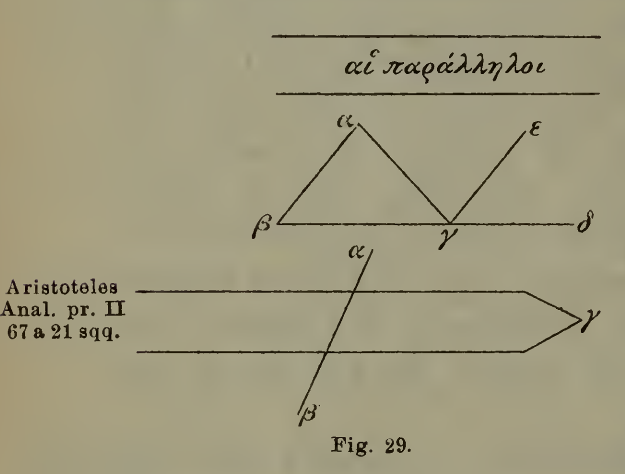


Fig. 29.

ὅτι τὸ ἀπὸ τῆς διαμέτρου τετράγωνον μεῖζον τοῦ ἀπὸ τῆς πλευρᾶς.

Aristoteles Anal. pr. II 67 a 21 sqq. μὴ δώσομεν, ὅτι, ὅ πως ἐπίσταταί τις, τοῦτό πως ἀγνοεῖ; ἐπίσταται γὰρ ἴσως 20 κατὰ τὴν καϑόλου ἐπιστήμην, ἀγνοεῖ δὲ κατὰ τὴν μερικήν· οἷον ὅτι πᾶσα ἡμίονος ἄτοκος, καὶ ἀγνοεῖ, ὅτι αὕτη ἡ ἡμίονος ibid. 67 a 35. ἄτοκός ἐστιν. εἰ οὖν μὴ δώσομεν τοῦτο, τὸ ἐν τῷ Μένωνι ἀπόρημα συμ- Platon, Menon 85 a sqq. βήσεται· ζητεῖ γὰρ ἐκεῖσε ὁ Σωκράτης τὸν δοῦλον, εἴπερ ἐπίσταται, ὡς τὸ 25

2 ταῖς (pr.)] τῇ. ἴση] corr. ex ἴσαι. οὐχ] om. 6 αλγ] immo βλγ. 13 τάς] τήν. 18 μεῖζον] immo διπλάσιον. 20 ἀγνοεῖ;] ἀγνοεῖ. 23 ὅτι] supra scr.

τάχα, ὡς αἱ δύο πλευραὶ τοῦ τριγώνου ἢ ἴσαι τῆς μιᾶς εἰσιν ἢ καὶ ἐλάττονες, τῶν γεωμετρῶν μείζους λεγόντων, ἢ ἐν τῷ γραμμὰς ἄγειν μὴ ὡς δεῖ ἢ ἐν τῷ γράφειν κακῶς τὰ ἡμικύκλια (vgl. Alexandros p. 23, 26 ff.). Dazu am Rande: ∸ ἔστω τάχα

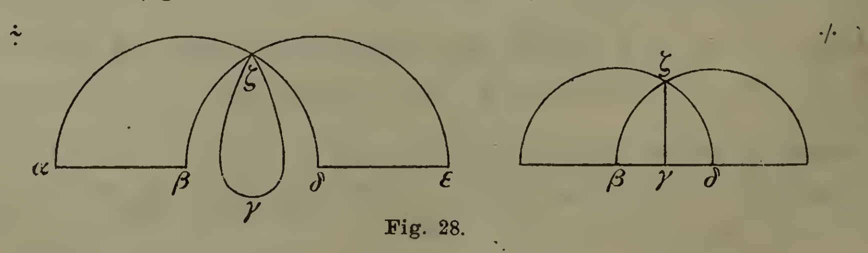


Fig. 28.

γραμμὴ εὐϑεῖα ἡ αβγδε καὶ τρίγωνον τὸ ζβδ, πλευραὶ δὲ ἡ βγδ καὶ ἡ ζβ καὶ ἡ ζδ, und ·/· ἡμικύκλιον τὸ γβζ γδζ, τρίγωνον τὸ ζβ βγδ δζ, ἴση ἡ ζβ τῇ βγ καὶ τῇ γδ.

ἀπὸ τῆς διαμέτρου τοῦ τετραγώνου τετράγωνον διπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς
πλευρᾶς· τοῦ δὲ ἀποφηναμένου μαιεύει τοῦτον ὁ Σωκράτης καὶ καθ' ἕκαστον
ἐρωτᾷ, καὶ συγκατατίθεται ἐκεῖνος, καὶ οὕτως, ὃ οὐκ ἠπίστατο, φαίνεται ἐπι-
στάμενος διὰ τῆς καθ' ἕκαστον ἀγωγῆς καὶ μεθόδου· ζητεῖ γάρ, εἴπερ ἴσα
5 ἐστὶ τὰ ἐν τῷ τετραγώνῳ δύο τρίγωνα τὰ ἀπὸ τῆς διαμέτρου γινόμενα ἴσα,
καὶ ὁμολογεῖ ἐκεῖνος· ὥστε τὰ δύο τρίγωνα τοῦ ἑνὸς τριγώνου διπλάσια. κατα-
γράφει δὲ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς διαμέτρου τετράγωνον, καὶ εὑρίσκεται τὸ ἓν τρίγω-
νον, οὗ διπλάσια ἦσαν τὰ δύο τρίγωνα, τέταρτον τοῦ γεγονότος ἐκ τῆς δια-
μέτρου τριγώνου· ὥστε τὰ $\overline{\delta}$ τρίγωνα τοῦ ἀπὸ τῆς
10 διαμέτρου τετραγώνου τῶν δύο τριγώνων τοῦ ἀπὸ τῆς
πλευρᾶς τετραγώνου διπλάσια, ταὐτὸν δ' εἰπεῖν καὶ τὸ
ἀπὸ τῆς διαμέτρου τετράγωνον τοῦ ἀπὸ τῆς πλευρᾶς
τετραγώνου διπλάσιον. ὥστε, ὅ πως ἠγνόει, ἄλλως πως
ἐπίσταται, καὶ οὕτω λύει τὸ σόφισμα καὶ οὐ, καθὼς
15 ἄλλοι λύουσιν ἐρωτηθέντες περὶ τῆς δυάδος, εἴπερ ἐπί-
στανται, καὶ καταφήσαντες, ἀρνούμενοι δὲ περὶ τῆς ἐν
τῇ χειρὶ μὴ φαινομένης δυάδος· λέγουσι γάρ, ὅτι, ἣν ἐπιστάμεθα δυάδα, ταύ-
την ὡμολογήσαμεν εἰδέναι· εἰ γοῦν ἦν, φησίν, αὕτη ἱκανὴ λύσις, ἥρμοζεν ἂν
ἐπὶ πᾶσι τοῖς τοιούτοις σοφίσμασιν, ἄλλως τε οὐδὲ λέγει τις ἀπολογούμενος,
20 ὅτι, ὃ οἶδα, τοῦτο ἀπολογοῦμαι.

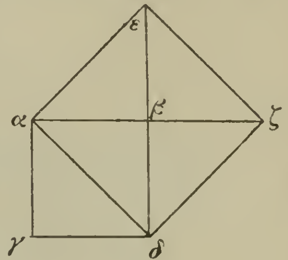


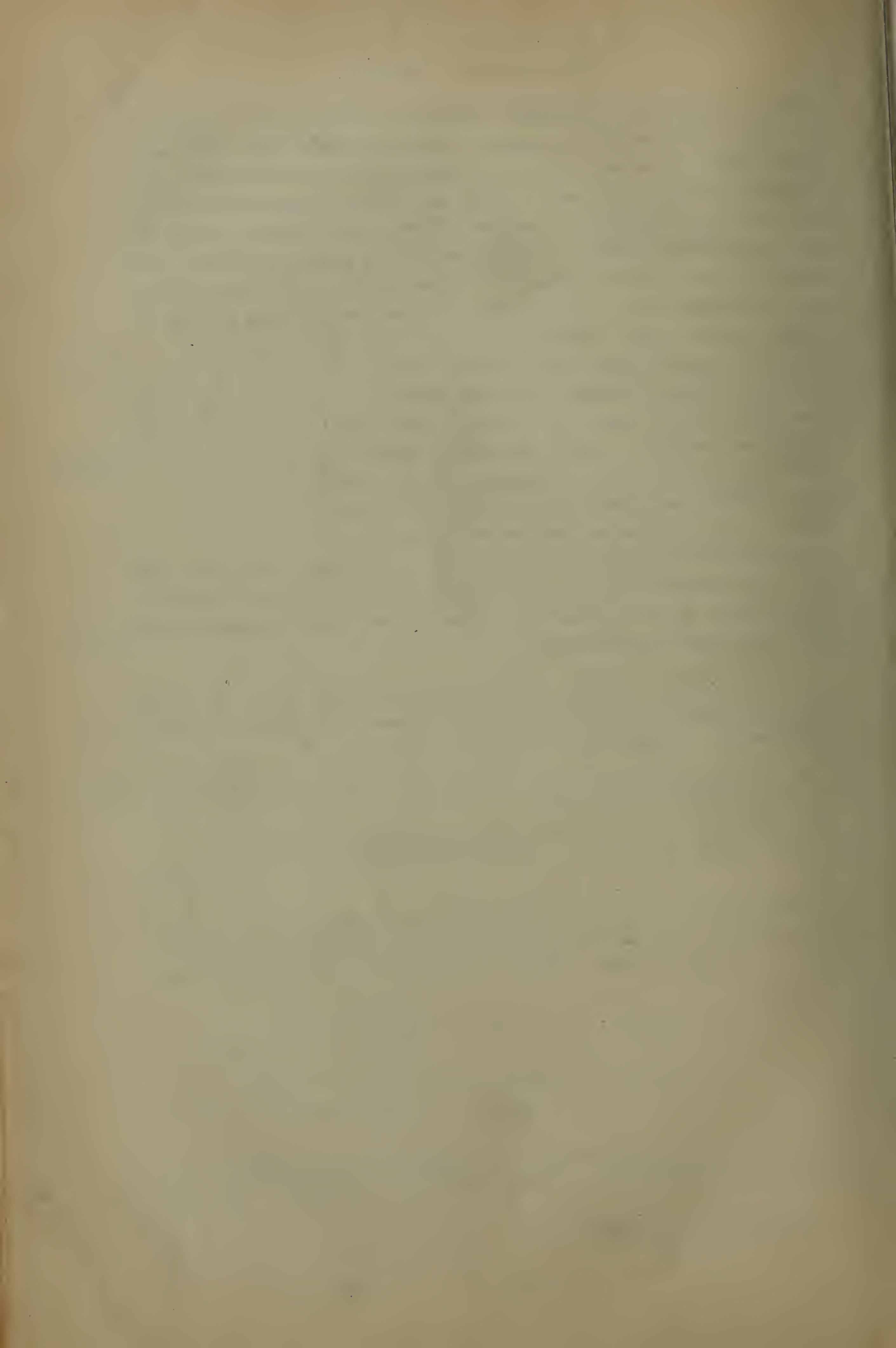
Fig. 30.

Anal. post. I 71 a 30 sqq.

---

9 τά] corr. ex δ'. $\overline{\delta}$] δ'. 10 τετραγώνου] des. f. 205r. In mg. inf.: τὸ ἀπὸ τῆς πλευρᾶς τετράγωνον $\overline{\alpha\beta\gamma\delta}$, τὸ ἀπὸ τῆς διαμέτρου $\overline{\alpha\delta\varepsilon\zeta}$. In figura: τοῦτο τὸ τοῦ Μένωνος. 11 τετραγώνου] τριγώνου. 17 ἥν] ἤν.

Kopenhagen, März 1902.



STUDIEN
ZUR GESCHICHTE DER MATHEMATIK
INSBESONDERE DES MATHEMATISCHEN UNTERRICHTS
AN DER UNIVERSITÄT GÖTTINGEN
IM 18. JAHRHUNDERT.

MIT EINER EINLEITUNG:

ÜBER CHARAKTER UND UMFANG HISTORISCHER FORSCHUNG
IN DER MATHEMATIK.

VON

CONRAD H. MÜLLER

AUS GÖTTINGEN.

Vorwort.

Die Orientierung über Charakter und Inhalt vorliegender Arbeit gibt die Einleitung, aber verwebt in die Exposition einiger allgemeinen Ideen über Charakter und Umfang historischer Forschung in der Mathematik. Derartige generelle Darlegungen haben das Mißliche, unbestimmt und anfechtbar zu erscheinen, das Gute, den Leser am raschesten mit dem Milieu bekannt zu machen, aus dem heraus die Arbeit geschrieben ist.

Der Gedanke, um den sich die Ausführungen der Einleitung gruppieren, läßt sich kurz so bezeichnen: soviele der Zweige, in denen der mathematische Wissenschafts- und Unterrichtsbetrieb seine Ausgestaltung findet, soviele auch der Zweige mathematischer Geschichtschreibung, die in letzter Linie alle auf die Beantwortung der einen zentralen Frage abzielen: Was bedeutet und was hat zu den verschiedenen Zeiten die Mathematik für die Kultur bedeutet? Dem Urteil des Lesers ist es überlassen zu entscheiden, wieweit die vorliegende Arbeit an ihrem Teile zur Beantwortung dieser Frage in etwas beiträgt.

Meine Pflicht ist es an dieser Stelle nur noch, dankbar der Unterstützung zu gedenken, die mir in der einen oder anderen Richtung bei der Abfassung der Arbeit zuteil geworden ist. An erster Stelle nenne ich meinen hochverehrten Lehrer, Herrn Geheimen Regierungsrat Professor Dr. F. Klein, zu dem ich seit 1900 in nähere Beziehung treten durfte. Ihm verdanke ich eine große Reihe von Gesichtspunkten und Auffassungen, die — nachdem ich von ihm auch die erste Anregung zu einer historischen Arbeit über die Mathematik erhielt — natürlich in derselben verschiedentlich zur Geltung kommen. Zugleich ebnete er mir den Weg zu den Quellen. Mit Erlaubnis der Herren: des Herrn Kurators Geheimen Oberregierungsrates Dr. E. Höpfner, des Herrn Prorektors Geheimen Regierungsrates Professor Dr. F. Leo und des Herrn Dekans der philosophischen Fakultät Professor Dr. A. Stimming konnte ich die Kuratorialakten, die Akten der Universität und die Akten der philosophischen Fakultät benutzen. Schließlich nenne ich hier auch die Verwaltungen der hiesigen kgl. Universitätsbibliothek und der Stadtbibliothek in Bremen, durch die ich manche Förderung bei der Herbeischaffung des weitschichtigen Materials erhielt.

Göttingen, im Dezember 1903. **Conrad Müller.**

Inhaltsverzeichnis.

Drittes Kapitel:

Die Mathematik der Aufklärung in Göttingen:
A. G. Kästner und A. L. Fr. Meister.

Viertes Kapitel:

Die Mathematik des Neuhumanismus in Göttingen:
A. G. Kästner, C. F. Seyffer usw.

Einleitung.

Über Charakter und Umfang historischer Forschung in der Mathematik.

Um den folgenden Darlegungen einen bestimmten Halt zu geben, mögen sie z. T. angeknüpft werden an die Ansätze, welche das vergangene 19. Jahrhundert in Richtung auf historische Forschung und enzyklopädische Arbeit auf mathematischem Gebiete tatsächlich gemacht hat. Dabei ist die Beschränkung der geographischen Perspektive auf Westeuropa jedenfalls so lange unbedenklich, als es sich darum handelt, im Anschluß an die vorhandenen Ansätze eine richtige Einschätzung und Wertung historischer Forschung auf dem Gebiete des mathematischen Wissenschaftsbetriebes zu gewinnen. Ob aber diese Determination gestattet, auch ein richtiges Bild von der Aufgabe historischer Arbeit auf dem Gebiete des mathematischen Unterrichtsbetriebes zu entwerfen — ist a priori nicht evident und wahrscheinlich zu verneinen. —

Die letzten Jahre des 19. Jahrhunderts haben nach einer Seite eine bemerkenswerte Wertschätzung historischer Forschung auf dem Gebiete des mathematischen Wissenschaftsbetriebes gebracht: soweit nämlich die Geschichte der produktiven Wissenschaft in Frage kommt. Im Innersten begründet ist diese Erscheinung vielleicht in dem Umstande, daß heute dem Gebäude der Mathematik nicht mehr wie früher eine absolute Konstanz zugeschrieben wird, sondern daß man sich vielmehr gewöhnt hat, auch in die Mathematik den Gedanken der Entwicklung und damit der Veränderlichkeit hineinzutragen, der hier natürlich nur insoweit einen Platz finden kann, als die Frage nach der Grundlegung durch die Prinzipien, nicht nach dem Ausbau durch den Prozeß des logischen Schließens in Betracht kommt. Aber es interessiert an dieser Stelle weniger, dem Grunde des Faktums nachzugehen, als vielmehr das Faktum als solches zu würdigen.

Da zeigt sich nun zunächst gegen früher ein bedeutsamer Unterschied in dem Charakter der Geschichtschreibung. Geschichtschreiber der

Mathematik hat es zu allen Zeiten gegeben; wir besitzen einige Werke, die ein unvergängliches Denkmal emsigen Sammlerfleißes und großer Gelehrsamkeit ihrer Autoren sind. Aber ebensowenig wie Fleiß und Gelehrsamkeit die alleinigen und hervorstechendsten Attribute eines produktiven Mathematikers sind, bei dem die Gestaltungskraft, die Gabe intuitiv in dem Gegebenen das Neue zu erblicken, das Charakteristikum ist, ebenso wenig reichen sie auch für den Historiker der produktiven Mathematik aus. Er muß befähigt sein, in der Geschichte nicht nur das Fazit einer langen und oft ermüdenden Gedankenarbeit zu sehen, sondern mit dem arbeitenden Genie zu fühlen, so daß ihm oft das Faktum vor dem Modus verblaßt. Legt man diesen Maßstab bei der Beurteilung eines Geschichtswerkes zugrunde, so erscheint, um nur von einigen umfassenden Werken zu sprechen, GER. JO. VOSSIUS (1577—1649), *De universa matheseos natura,* Amstelodami 1660 als eine von einem Philologen gemachte Syntaxe der Werke des Altertums und Mittelalters, um dadurch das erstorbene Interesse für Mathematik in Holland neuzubeleben; JOH. CHR. HEILBRONNERS (1706—1747) *Historia matheseos universae,* Lipsiae 1742 als der erste schwache Versuch eines fleißigen Deutschen, ausgerüstet mit WOLFischer Logik eine gewisse Systematik in das Chaos der Literatur zu bringen; des 76jährigen G. A. KÄSTNERS (1719—1800) Geschichte der Mathematik, 4 Bde., Göttingen 1796/1800 als bloße Literärgeschichte; J. E. MONTUCLA, *Histoire des mathématiques*, 4 Bde., Paris 1798/1802[1]) als erstes Beispiel einer pragmatischen Geschichte und erst M. CANTORS Vorlesungen über Geschichte der Mathematik, 3 Bde., Leipzig 1880/98, 2. Aufl. 1894/1901[2]) als der Typ einer wirklich modernen Geschichtschreibung.

Man wird fragen, weshalb erst CANTOR eine so weitgehende Vertiefung in den Stoff und eine so vollkommene Durchdringung desselben möglich wurde. Die Antwort ist leicht. CANTOR hat sein Thema räumlich und zeitlich beschränkt, räumlich: insofern er nur die reine Mathematik (*Mathesis pura*) behandelt, zeitlich: insofern er sein Werk 1759 mit dem Auftreten von JOSEPH LOUIS LAGRANGE schließt. Aber damit ist zugleich ausgesprochen, daß CANTORS Werk kein vollständiges Bild der Geschichte der produktiven Mathematik gibt. Es ist die größte unter den Monographien zur Geschichte der Mathematik, die uns gerade die letzten Jahrzehnte des vergangenen Jahrhunderts so zahlreich schenkten, und in denen, je spezieller

1) Die beiden letzten Bände herausgegeben von J. J. LE FRANÇAIS DE LALANDE; die erste Auflage erschien in 2 Bänden Paris 1758/60.

2) Vgl. die interessante Rezension von P. STÄCKEL, Gött. Gelehrt. Anz. 1900, p. 251 ff., die viele neue Gesichtspunkte über mathematische Geschichtschreibung heranbringt.

sie den behandelten Gegenstand umgrenzten, desto mehr das Ideal echter Geschichtschreibung erreicht wurde, so daß hier tatsächlich die großen Tendenzen aus der Fülle der Einzelheiten herausgehoben sind, die Summe der konkreten Einzelheiten in die Einheit einer abstrakten Gesamtkraft zusammengefaßt ist.[1]) Als Specimina solcher Monographien (für die neuere Zeit z. T. von produktiven Mathematikern selbst verfaßt) nenne ich etwa: für die ältere Geschichte H. G. Zeuthen, Die Lehre von den Kegelschnitten im Altertum, Kopenhagen 1886 und P. Tannerys mannigfache Untersuchungen über die Mathematik der Griechen (Diophant usw.), für die mittlere Geschichte die vielen Arbeiten von M. Curtze und S. Günther; für die neuere etwa die Untersuchungen P. Stäckels und Fr. Engels über die nichteuklidische Geometrie[2]) und H. Burkhardts noch nicht abgeschlossenen Bericht über die „Entwicklungen nach oszillierenden Funktionen“, Jahresb. d. deutsch. Math.-Ver. 10 (1902 ff.). Dabei zeigt sich allerdings, daß die neuere Zeit (spez. das 19. Jahrhundert) noch am wenigsten historisch bearbeitet ist; es müssen hier noch viele *divers volumes destinés chacun à l'histoire detaillée d'une branche spéciale*[3]) geschrieben werden, ehe Cantors Desiderium[4]) eines *dernier volume, résumant le tout, faisant ressortir les grandes idées du siècle* — das Desiderium einer *histoire des idées* — erfüllt ist.

Wäre so im Anschluß an Cantors Werk der Weg über die Monographien zu einer tief angelegten Geschichte der produktiven reinen Mathematik vorgezeichnet, so ist nun aber nicht zu vergessen, daß dies heißt, nur erst nach der einen Seite die Geschichtschreibung der produktiven Mathematik ausbauen. Es gilt nicht nur Cantors zeitliche, sondern auch räumliche Beschränkung aufzuheben und auch die angewandte Mathematik (*Mathesis applicata*) wieder in die historische Betrachtung hineinzuziehen und damit, was den Umfang der Geschichtschreibung der produktiven Mathematik anbetrifft, zu den Gewohnheiten der Geschichtschreiber früherer Jahrhunderte, vorzüglich der J. E. Montuclas zurückzukehren.

---

1) R. M. Meyer, Euphorion 8 (1901).

2) Vgl. P. Stäckel und Fr. Engel, Die Theorie der Parallellinien von Euklid bis auf Gauss, eine Urkundensammlung zur Vorgeschichte der nichteuklidischen Geometrie, Leipzig 1897; auch des ersteren zahlreiche Aufsätze über W. Bolyai und insbesondere Joh. Bolyai in den Mathematischen Berichten aus Ungarn 17 u. 18 (1899/1902).

3) Daß gerade in letzter Zeit verschiedene Autoren, angeregt durch die von der deutschen Math.-Vereinigung herausgegebenen Referate, in dieser Hinsicht tätig sind, soll nicht unerwähnt bleiben.

4) Vgl. M. Cantor, *Sur l'historiographie des mathématiques*, Compte rendu du 2ième congres intern. de math. à Paris 1900, Paris 1902, p. 42.

Der Tenor des vorstehenden Satzes sagt es bereits, daß vorläufig hier kaum die ersten Ansätze zu einer Geschichte (das Wort immer hier in dem weitesten Sinne genommen) der angewandten Mathematik vorliegen. Es erhält in dieser Tatsache ein Mißverhältnis seinen Ausdruck — über das an anderer Stelle im Verlaufe vorliegender Arbeit noch zu sprechen sein wird —, daß nämlich in dem vergangenen 19. Jahrhundert die reinen Mathematiker je länger je mehr die Anwendungen ihrer Wissenschaft in Physik und Technik aus den Augen verloren haben und umgekehrt die Praktiker nicht den Weg zur reinen Mathematik gefunden haben, so daß es ganz naturgemäß ist, wenn die Geschichtschreiber sich berechtigt glaubten, jene zweite Seite ihrer Forschung weniger zu berücksichtigen.[1]) Und doch kann kein Zweifel darüber sein, wie fruchtbar gerade der Gedanke des Zusammenhangs von Forschung und Anwendung für die richtige Auffassung des geschichtlichen Faktums ist, insbesondere der früheren Jahrhunderte bis in den Anfang des 19. Jahrhunderts, wo diese unglückliche Trennung von *Mathesis pura* und *applicata* noch nicht statuiert war. Dieser Gedanke führt mich also dahin, das oben zitierte Desiderium CANTORS dahin zu erweitern, daß gleichzeitig die leitenden Ideen der angewandten Mathematik ihre geschichtliche Würdigung erhalten möchten, wobei gerade das Studium des Einflusses und der Anregungen, die die reine Mathematik von der angewandten erhalten hat, allerdings nur ein einzelnes, aber besonders reizvolles Kapitel ist. —

Soviel über den ersten und vielleicht wichtigsten Zweig mathematischer Geschichtschreibung, der seinen Stoff auf dem Felde produktiver Wissenschaft findet. An seiner Seite stehen zwei weitere Zweige, von denen der eine besonders hervortritt, sobald es sich um die Geschichte der Mathematik vergangener Jahrhunderte handelt, der andere erst für die Zukunft eine vorzügliche Beachtung erfordert.

Gehen wir noch einmal auf die Anwendungen der Mathematik zurück, so kennen wir heute nur Anwendungen des Inhalts der Mathematik zum Verständnis und zur Beherrschung der Natur, wobei man, wenn man will, hier auch die Anwendung auf die Geistestätigkeit des Menschen in der mathematischen Psychologie einbegreifen kann. Die früheren Jahrhunderte aber haben auch eine Anwendung der mathematischen Methode d. h. des mathematischen Schlußverfahrens in dem ganzen Umkreis menschlicher Geistestätigkeit, insbesondere im Gebiete philosophischer Spekulation, gekannt.[2]) Und wenn auch die Erkenntnis, daß die Ausdehnung der mathe-

---

1) Ich verkenne nicht, daß es Ausnahmen gibt (z. B. S. GÜNTHER), aber mir kommt es hier nur auf die Festlegung des generellen Tatbestandes an.

2) Einige Belege für diese Angaben finden sich unten im Kap. I.

matischen Methode auf andere Wissenschaften ein Mißgriff war, den mathematischen Enthusiasmus dämpfte und die Mathematik in die ihr angemessenen Schranken zurückwies, das Grenzgebiet, auf dem sich die Mathematik mit anderen Wissenschaftsgebieten berührt, wurde somit nicht ausgemerzt; insbesondere blieben die Probleme, die sich auf dem Grenzgebiete von Mathematik und Philosophie erheben, und erwarteten ihre Lösung gleichmäßig von dem Mathematiker und Philosophen. Und in der Tat ist, im richtigen Sinne gefaßt, dieser Zusammenhang ein durchaus gesunder: die Mathematik ist dogmatisch, sie schließt aus Prämissen, deren logische Widerspruchsfreiheit, Unabhängigkeit usw. sie erweist, über deren Entstehung und Ausbildung in unserm Intellekt sie sich aber keine Kritik zumißt, diese vielmehr der Philosophie überlassend. Aufgabe des mathematischen Geschichtschreibers aber ist es hier, diesen Zusammenhängen in ihrer verschiedenen Entwicklung nachzugehen und dabei auch die Irrwege nicht zu vermeiden, die oft für das Verständnis einer Entwicklung gerade hier von der allergrößten Bedeutung werden können. Zugleich wird er so eine erwünschte Ergänzung zu den parallellaufenden Untersuchungen der philosophischen Geschichtschreiber liefern, bei denen sich oft der Übelstand geltend macht, daß die Entwicklung der modernen Mathematik besonders nach Seiten der Arithmetisierung d. h. „der konsequente Aufbau der Mathematik auf Grund des modernen Zahlbegriffs außerhalb der mathematischen Fachkreise immer noch wenig gekannt und noch weniger nach seiner Wichtigkeit verstanden ist“.[1])

Sind derartige Untersuchungen oft schwierig und unerquicklich wegen des kleinen Gewinns, den sie trotz ihrer Weitschichtigkeit und Umständlichkeit gewöhnlich eintragen, so zeitigt der andere oben angekündigte Zweig mathematischer Geschichtschreibung, der von der Organisation wissenschaftlicher Arbeit berichtet, schneller Früchte. Insbesondere wird sich hier für die Zukunft dem Historiker ein großes Arbeitsfeld erschließen. Denn gerade das ausgehende 19. Jahrhundert hat infolge der stets wachsenden Zahl von produktiven Mathematikern, ja selbst produktiv tätigen Völkern Organisationen (Gründung mathematischer Gesellschaften und internationaler Kongresse, Herausgabe der mannigfaltigsten Zeitschriften, Enzyklopädien und Kataloge) entstehen sehen, an denen der Historiker nicht vorübergehen darf, wenn er ein richtiges und vollständiges Bild des jeweiligen mathematischen Betriebes erhalten will.[2]) —

---

1) F. Klein, Anwendung der Diff.- u. Int.-Rechnung auf Geometrie, eine Revision der Prinzipien, Leipzig 1902.

2) Die Angaben der Textes hätten durch Spezifikation belebt werden können. Es genüge hier aber der Hinweis auf nur drei Dinge, bei denen die Geschichte

Fassen wir bis jetzt zusammen, so sehen wir den Historiker des mathematischen Wissenschaftsbetriebes an drei Charaktertypen arbeiten, am mathematischen Künstler, Philosophen und Organisator. Sein Arbeitsfeld erweitert sich, wenn wir jetzt zur Charakterisierung der Geschichtschreibung des mathematischen Unterrichtsbetriebes fortschreiten.

Die Mathematik ist von jeher ein bedeutender Lehrgegenstand im Jugendunterrichte gewesen. Sieht man den Zweck des Unterrichts darin, daß durch ihn der Jugend von der älteren Generation derjenige Teil des Kulturbesitzes übermittelt werden soll, von dem nach ihrem Urteil die weitere günstige Entwicklung ihres gegenwärtigen geistigen Besitztums abhängt, so ist selbstverständlich, daß die Mathematik stets ein Faktor des Jugendunterrichts gewesen ist und sein muß, aber es bleibt die Frage offen, wie bedeutsam dieser Faktor jeweils eingeschätzt wird. Und in der Tat zeigt sich hierbei eine große Verschiedenheit nicht nur bei den verschiedenen Völkern und Nationen, sondern auch innerhalb einer Nation zu den verschiedenen Zeiten. Die beiden Extreme, zwischen denen die Wertschätzung der Mathematik als Unterrichtsstoff schwankt, ist auf der einen Seite die Schätzung nur der formalen, auf der andern die Schätzung nur der realen Seite der Mathematik. Humanismus und Realismus sind die beiden Schlagwörter, die in der deutschen Schulgeschichte diesen Gegensatz bezeichnen.

Das Gesagte genügt schon, um fühlbar zu machen, daß dem Geschichtschreiber der Mathematik sich hier ein weites Feld publizistischer Tätigkeit eröffnet, zu der ganz besonders die praktischen Schulmänner prädisponiert erscheinen.[1]) Und in der Tat sind von schulmännischer Seite recht schätzenswerte Arbeiten geliefert worden; vor allem sind die zahlreichen Programm-

---

unmittelbar interessiert ist: seit 1899 erscheint in neuer Form — von G. Eneström herausgegeben — die speziell der Geschichte gewidmete Bibliotheca mathematica und ungefähr zu der gleichen Zeit beginnt die große Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften, mit Einschluß ihrer Anwendungen zu erscheinen, in der die Referate allerdings anfänglich rein enzyklopädisch gefaßt, immer mehr den Charakter kleiner Monographien und Essays unter starker Betonung des historischen und bibliographischen Moments annehmen. Das Dritte ist der seit 1900 erscheinende Katalog der naturwissenschaftlichen Literatur, der außer einem *author catalogue* die gesamte Literatur eines Jahres nach sachlichen Momenten geordnet enthält.

1) Für den Geschichtschreiber der pädagogischen Fragen in der Mathematik kommt nämlich neben einem Verständnis der in Frage kommenden Gebiete, insbesondere auch vom Standpunkte der höheren Mathematik, wesentlich ein pädagogischer Takt und eine pädagogische Erfahrung in Betracht.

abhandlungen der Schulen[1]) usw. oft Fundgruben der interessantesten Tatsachen. Aber es sind doch nur Stücke des Gesamtbildes, es fehlt noch viel zu einer umfassenden Darstellung, und selbst eine orientierende Darstellung, die für den mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterricht dasselbe leistet, wie Fr. Paulsens Buch: Geschichte des gelehrten Unterrichts, Leipzig 1885, in 2. Auflage 2 Bde., 1895/6 für den klassisch-historischen Unterricht, ist vorläufig noch ein Desideratum. Als Specimen einer etwas größeren Monographie aber bleibe hier S. Günthers Geschichte des mathematischen Unterrichts im Mittelalter, Monum. paedag. Germ., Leipzig 1887, nicht unerwähnt. —

Entschließt man sich von einem pädagogischen Problem in der Mathematik zu sprechen, so mag man in dem Vorhergehenden das Postulat einer historischen Behandlung dieses Problems nach seiner didaktischen Seite ausgesprochen finden. Anders gestaltet sich das Problem im Hochschulunterrichte, wo die didaktische Seite der Mathematik, vielleicht in wenig wünschenswerter Weise, zurücktritt, dafür aber besonders in neuerer Zeit die organisatorische Seite des pädagogischen Problems eine bedeutsame Rolle spielt. Beschränken wir uns hier auf Deutschland, so hängt dies ganz allgemein mit dem Umstande zusammen, daß die deutschen Universitäten stets im kleinen die jeweiligen großen Geistesströmungen und Zeittendenzen widerspiegeln und daß sie auf der andern Seite auch einen Einfluß auf die Ausgestaltung des Zeitgeistes haben.

Die verschiedenen Seiten der Mathematik: die Mathematik als eine Kunst, die nur von wenigen ihres ästhetischen Genusses wegen, von dem Naturforscher aber getrieben wird, um sich ihrer als Mittel bei der Beschreibung der Tatsachen der Naturerscheinungen zu bedienen; die Mathematik als einen bedeutsamen Gegenstand des Jugendunterrichts, dem sie Inhalt und Form gibt; schließlich aber auch als ein gewaltiges Instrument in den Händen des Praktikers, die Natur und den Weltverkehr zu beherrschen, im Hochschulunterrichte gleichmäßig zur Geltung zu bringen und in eine gesunde Beziehung zueinander zu setzen, das ist die organisatorische Seite des pädagogischen Problems. Es ist in der Neuzeit von F. Klein und der „Göttinger Vereinigung zur Förderung der angewandten Physik“ in dem Punkte in Angriff genommen worden, wo es sich um die Berücksichtigung auch

1) Vgl. z. B. O. Beier, Die Mathematik im Unterrichte der höheren Schulen von der Reformation bis zur Mitte des 18. Jahrh., Progr. d. Realschule zu Crimmitschau 1879 und auch die Artikel über die Mathematik in den verschiedenen pädagogischen Enzyklopädien (z. B. in W. Rein, Enzyklopädisches Handbuch der Pädagogik, Langensalza 1895 ff. und K. A. Schmid, Enzyklopädie des gesamten Erziehungs- und Unterrichtswesens, Gotha 1859 ff.; 2. Aufl. 1876 ff.).

der angewandten und technischen Seite der Mathematik im Hochschulunterrichte handelt.

Die Aufgabe des Historikers solchen Bestrebungen gegenüber ist klar; es kommt für ihn darauf an, sie als Symptome eines bestimmten Zeitgeistes aufzufassen und von diesem Standpunkt aus dem Entstehen und Vergehen solcher organisatorischer Einrichtungen nachzugehen. Bisher scheint aber in dieser Hinsicht historisch noch am wenigsten getan. —

Weiter spinne ich diese allgemeinen Betrachtungen über Charakter und Umfang mathematischer Geschichtschreibung nicht fort. Durch Anknüpfung an bestehende Teile des Gesamtbaus der Mathematik ergab sich die jeweilige Formulierung eines speziellen Problems der mathematischen Geschichtschreibung: der Historiker trat dem mathematischen Künstler, Philosophen, Organisator und Pädagogen gegenüber. Damit scheint dem Historiker noch eine exzeptionelle Stellung zugewiesen, aber dies doch nur so lange, als man den Standpunkt nur innerhalb der Mathematik selbst wählt. Es gibt einen Standpunkt, von dem aus produktiv (sowohl nach der reinen wie angewandten Seite), organisatorisch und pädagogisch tätige, philosophisch reflektierende und historisch arbeitende Mathematiker alle gleichmäßig an der Ausgestaltung des großen Organismus, der den stolzen Gesamtnamen „Mathematik“ führt, tätig erscheinen. Man mag diesen den kulturhistorischen Standpunkt nennen. Es ist zugleich der Standpunkt, von dem aus sich die oben genannte zentrale Fragestellung formuliert: was bedeutet und was hat zu den verschiedenen Zeiten die Mathematik für die Kultur bedeutet?, d. h. wie ist und wie war das Leben und Wirken des Organismus, den wir Mathematik nennen?

Eine endgültige Antwort auf diese Frage wird man nie erwarten dürfen. Darum behält eine solche Fragestellung ihren Wert. Insbesondere darf man hoffen, durch geeignete Beschränkungen, wodurch die Vielseitigkeit des Problems jedoch nicht leiden darf, das Problem so zu spezialisieren, daß eine Behandlung desselben nicht aussichtslos erscheint. Das Geeignetste ist eine räumliche und zeitliche Limitierung: räumlich, indem man studiert, wie der Organismus Mathematik an einer bestimmten kulturellen Institution zur Geltung kommt, zeitlich, indem man ihn nur während einer bestimmten Zeitperiode verfolgt. Es erscheint mir als vornehmste Aufgabe vorliegender Arbeit die Fruchtbarkeit der allgemeinen Frage- und Problemstellung an einem auf die genannte Weise zweckmäßig eingeschränkten Gegenstande zu erweisen, zu dessen näherer Charakterisierung einige kurze Angaben genügen. —

Es wurde schon oben der eigenartigen Stellung der Universitäten im deutschen Geistesleben gedacht: die Universität eine Monas, die nach ihrer

Art die gesamte Kultur widerspiegelt oder doch widerzuspiegeln sucht. Auf unsern näheren Gegenstand angewandt heißt das: bei einer Institution, wie es die deutsche Universität ist, kommen oder sollten wenigstens alle die früher genannten typischen Ausgestaltungen der Mathematik in einer spezifischen Form zur Geltung kommen: für produktive, philosophierende, organisierende, pädagogisch und historisch tätige Mathematiker ist hier ein gemeinsames Arbeitsfeld. Es ist also nach dem Vorigen zu hoffen, wenn man eine bestimmte typische Universität auswählt und diese nur über einen bestimmten Zeitraum hin verfolgt, ein richtiges Bild von dem zu bekommen, was oben das Leben und Wirken des Organismus Mathematik genannt wurde. Dieses Beispiel ist uns die Universität Göttingen des 18. Jahrhunderts. —

Zum Schluß noch ein Wort über die Behandlung des Problems. Es liegt außerhalb des Rahmens vorliegender Arbeit, im folgenden eine erschöpfende Darstellung zu geben. Was gegeben wird, sind zweckmäßig ausgewählte Stichproben nach der ein oder anderen Seite, wobei die Detailausführungen einer späteren Zeit vorbehalten bleiben. Damit hängt es auch in etwas zusammen, daß der Charakter der Darstellung nicht durchaus demonstrierend ist.

Im übrigen ergibt sich die generelle Disposition des Stoffes nach dem Vorigen von selbst. Es ist der Anschluß festzuhalten an die von anderer Seite im deutschen Geistesleben des 18. Jahrhunderts unterschiedenen Epochen. Sie werden bezeichnet durch die Worte Rationalismus, Aufklärung und Neuhumanismus.

Erstes Kapitel.

Die Universitäten des Rationalismus Halle und Göttingen und die Mathematik des Rationalismus.

Der allgemeine Gedanke, daß die Universitäten Deutschlands Zentren geistigen und kulturellen Lebens sind, hat von den verschiedensten Seiten eine Ausführung erhalten. Für den gegenwärtigen Zweck genügt es, dies für die Universitäten des 17. und 18. Jahrhunderts kurz anzudeuten, wobei eine besondere Rücksicht auf die Stellung der Mathematik genommen wird. Es ergibt sich so leicht der Anknüpfungspunkt für das Verständnis einerseits der Gründung der Universität Göttingen und andererseits für die Bedeutung, die die Mathematik hierbei einnahm. —

Die Universitäten des Mittelalters, zunächst gegründet unter kirchlicher Aufsicht, wurden am Ausgange des Mittelalters gleichmäßig die eifrigsten Vorkämpfer für Humanismus und Reformation, die beiden großen Revolutionen am Eingange zur Neuzeit, die eine auf dem Gebiete des menschlichen Wissens, die andere auf dem Gebiete menschlichen Glaubens. Aber beider Charakter war zu verschieden, als daß sie auf die Dauer Verbündete in dem gemeinsamen Kampfe gegen die Scholastik bleiben konnten: der Humanismus mit seiner auf das Diesseitige gerichteten Aktivität, seiner Wertschätzung der Gedankenarbeit, seinem Wunsch auf technische Beherrschung der Natur, die Reformation mit ihrem übernatürlichen Dingen zugewendeten Interesse, ihrem Bestreben auf Verinnerlichung des Gemüts. In dem 30jährigen Kriege wurde dieser Kampf mit den Waffen ausgefochten, in dem ganzen Rest des Jahrhunderts mit den Waffen des Geistes auf den Universitäten. Diese fruchtlose Fortsetzung des Kampfes wurde für die Universitäten verhängnisvoll. Sie waren in Gefahr, ihre geistige Führerschaft in Deutschland zu verlieren. Und in der Tat schickte man sich an, außerhalb der Tore der Universität aus den Trümmern, die man über die traurige Zeit des 30jährigen Krieges hinübergerettet hatte, ein neues Gebäude aufzuführen. Zunächst wurden die Städte (insbesondere die freien) des 17. Jahrhunderts Hüter des überkommenen Kulturbesitzes. Es erfolgten in ihren Mauern Gründungen der verschiedensten Gesellschaften zur Pflege von Wissenschaft und Sprache: Johannes Hevel (1611—1687) war Ratsherr und Otto von Guericke (1602—1686) Bürgermeister einer freien Stadt. Bald aber kam eine Förderung geistigen und kulturellen Lebens, und hier ganz besonders der mathematisch-naturwissenschaftlichen Disziplinen von einer neuen, früher nie gekannten Seite.

Der 30jährige Krieg hatte dem alten Feudalstaat des Mittelalters ein definitives Ende gemacht. Es blieb nominell noch das alte Kaiserreich bestehen, aber tatsächlich bildete sich in den einzelnen Ländern die absolutistische Regierungsform aus, wo der Fürst als Landesvater an die Spitze des Landes trat. Damit verlegte sich der Schwerpunkt des geistigen Lebens an den Hof. Hier bildete sich das neue Lebensideal des *galant homme* aus, der die Etikette versteht und in den Wissenschaften unterrichtet ist. Das Muster wurde der französische Hof Ludwigs XIV. Und nun erinnere man sich, daß in Frankreich gerade die von Nic. Cusanus (1401—1464), Nic. Copernicus (1473—1543), G. Peurbach (1423—1461), Joh. Regiomontanus (1436—1476) und anderen in Deutschland eingeleiteten mathematisch-naturwissenschaftlichen Studien ihren Fortgang fanden durch R. Descartes (1596—1650), Bl. Pascal (1623—1662), P. Fermat (1601—1665) usw., zu dem sich dann zunächst das im 17. Jahrhundert aufstrebende Holland

und nach der Zeit des Puritanertums England gesellte, um zu verstehen, daß auch an den deutschen Höfen die mathematischen Wissenschaften besonders gepflegt wurden. Es brach auch für Deutschland das mathematische Jahrhundert an, in dem eine Aktivität und ein jugendlicher Enthusiasmus herrschte, ein fröhlicher Glaube an die Macht des menschlichen Geistes und eine Befreiung von allem Rest überkommener Vorurteile sich anbahnte. G. Leibniz (1646—1716) ist der Repräsentant dieser Epoche, ein Hofmann und Verächter der Pedanten auf den Universitäten.

Aber es wäre merkwürdig gewesen, wenn die Universitäten sich auf die Dauer gegen den neuen Geist verschlossen hätten. Jedenfalls suchte die Jugend auf den Universitäten das Neue, und auf der andern Seite begannen auch hier die Fürsten, wenigstens auf den protestantischen Universitäten, eine Wandlung einzuleiten, indem sie als *summi episcopi* durch das Mittel der ersten, theologischen, Fakultät Einfluß auf die Universitäten zu erreichen strebten. Insbesondere suchten sie die Universitäten in Bildungsstätten für gute Beamte, die sie in ihrer Verwaltung benötigten, umzugestalten. Infolgedessen erhielt vor allem die juristische Fakultät eine so hohe Bedeutung und aus dem Bereich der philosophischen Fakultät wurden Mathematik und Naturwissenschaften wegen ihrer Brauchbarkeit geschätzt. In diesem Sinne lehrte Erh. Weigel (1626—1699) unter dem Schutze des Herzogs von Weimar in Jena „moderne" Mathematik und Astronomie.

Jedoch, es war nur ein Bessern am Alten; der Zweck wurde unvollkommen erreicht: die Fürsten stießen auf Widerstand bei den Universitäten und die Jugend fuhr fort, die fremdländischen, insbesondere holländischen Universitäten zu besuchen.[1]) Eine Gesundung des ganzen Universitätsbetriebes war nur von der Neugründung, die dem veränderten Zeitgeiste Rechnung trug, zu erwarten. So war denn den beiden aufstrebenden Höfen des 17. und 18. Jahrhunderts, Kurbrandenburg und Kurhannover, der Weg vorgezeichnet: sie durften hoffen, durch ihre Universitäten die alten ehrwürdigen Stätten deutscher Bildung (Leipzig, Jena, Helmstedt) zu überflügeln. Man muß es aber besonders beachten, daß diese Universitäten des 18. Jahrhunderts Gründungen von Fürsten sind, nur so versteht man die Stellung, welche sie im geistigen Leben einnahmen und besonders, in welchem Sinne die Wissenschaften auf ihnen eine Heimstätte fanden. Die Stiftungsurkunden atmen alle einen fürsorglich väterlichen, zugleich überlegenen Ton.

1) Einen interessanten Einblick in das Leben der damaligen Mathematik studierenden Jugend, wie auch der mathematischen Dozenten auf den alten Universitäten gewinnt man durch das Buch von J. Buck, Die Lebensumstände der preußischen Mathematiker, Königsberg 1755.

Die Universitäten des 18. Jahrhunderts sind keine impulsive Schöpfungen einer für ideelle Forschung begeisterten Menge, sondern Schöpfungen des kühl überlegenden Verstandes einzelner weniger: die Universitäten wesentlich Bildungsanstalten für gute Beamte: Theologen, Juristen, Mediziner und Schulmänner. So weit die Fürsten aber das eigentlich wissenschaftliche Moment begünstigten, verlegten sie dasselbe in die Akademien, die von den Fürsten — besonders von dem ersten preußischen König — an den Höfen eingerichtet wurden, wieder nach dem Muster von Frankreich und England: nach dem Muster der 1666 gegründeten *Académie des sciences* in Paris und der 1662 gegründeten *Royal society* in London. —

Die erste Neugründung einer Universität erfolgte 1694 in Halle. Die äußere Organisation wurde gegen die der alten Universitäten nicht geändert, allein schon deshalb nicht, um dieselbe bei der studierenden Jugend in Aufnahme zu bringen. So wurde insbesondere die philosophische Fakultät nicht den drei anderen, sog. oberen Fakultäten koordiniert; als Artistenfakultät blieb ihr auch in Halle die Vorbereitung der Studierenden für die oberen Fakultäten vorbehalten. Dieses Festhalten an der propädeutischen Stellung der vierten Fakultät hatte seinen tieferen Grund in der ungleichmäßigen Vorbildung der Jugend. Das Problem des Jugendunterrichtes, einst von den Reformatoren, besonders von Ph. Melanchthon, mit Vorliebe behandelt, war im Laufe der Zeit vergessen; es wurde erst wieder gestellt um die Mitte des 18. Jahrhunderts, als die Aufklärung den Rationalismus abgelöst hatte. Äußerlich kam diese Sonderstellung der philosophischen Fakultät oft dadurch zum Ausdruck, daß ein Professor der oberen Fakultät zugleich Mitglied der vierten Fakultät war und jeder Professor der oberen Fakultäten über Gegenstände dieser lesen konnte. Auch fehlte in Halle die Bevormundung durch die Theologie nicht ganz. Dies machte sich aber vorläufig nicht weiter unangenehm bemerkbar, indem der Pietismus eines A. H. Francke (1663—1727) vor der Hand mit dem Rationalismus eines Chr. Thomasius (1655—1728) und Chr. Wolf (1679—1754) in seinem Haß gegen die Orthodoxie der alten Universitäten eins war. Später erst entstand der Streit zwischen beiden, der die Vertreibung Wolfs aus Halle zur Folge hatte, und dessen man sich erinnern muß, um das rasche Aufblühen der zweiten Neugründung — der Universität Göttingen — zu verstehen.

Es darf hier nicht meine Absicht sein, weiter auf die innere Organisation, insbesondere auf das Verhältnis der einzelnen Wissenschaften untereinander, auch nur innerhalb der philosophischen Fakultät, einzugehen. Ich beschränke mich darauf, jetzt nur noch einiges über die mathematischen Wissenschaften beizubringen, wodurch die

Entwicklung derselben auf der Universität Göttingen später verständlicher wird. —

Zwölf Jahre nach der Stiftung wurde nach Halle, wo bis dahin die Mathematik „eine ganz unbekannte Sache" war, Chr. Wolf als erster *prof. publ. ord. matheseos* berufen. Sein Fürsprecher beim Könige Friedrich I. war G. Leibniz, mit dessen Philosophie Wolfs Name — wenn auch wider seinen Willen — bald verbunden werden sollte. Zunächst lag hierfür äußerlich allerdings kein Grund vor: Wolfs „Vernünftige Gedanken von Gott, der Welt und der Sache des Menschen, auch allen Dingen überhaupt" erschienen erst 1720. Darum aber war doch seine voraufgehende, nach mathematischer Richtung liegende publizistische Tätigkeit eine Vorbereitung zu diesem seinem ersten philosophischen Hauptwerke.[1]) Hatte schon R. Descartes begonnen, die Methaphysik zu demonstrieren, indem er die mathematischen Begriffe der Klarheit und Deutlichkeit als ausreichende Kriterien für die Wahrheit ansah, hatte schon B. Spinoza (1633—1677) seiner *Ethica* das Wort vorgesetzt *ordine geometrico demonstrata* und erinnerten die Monaden G. Leibnizs gar sehr an die Differentiale seiner Mathematik, so war es nur noch ein Schritt weiter auf dieser Bahn, wenn E. W. von Tschirnhausen (1651—1708)[2]) in der mathematischen Methode ein Mittel zu besitzen glaubte, die Wahrheit zu finden, und wenn sein Schüler Chr. Wolf diesen Gedanken: Der geordnete Fortgang von Definition durch Axiom zu den Theoremen und Beweisen der Ordner im chaotischen Durcheinander menschlicher Erfahrung und Erkenntnis, in die Tat umzusetzen bestrebt war, wie es schon eine beim Antritt des Lehramts in Leipzig 1703 gehaltene Disputation: *Philosophia practica universali methodo mathematica conscripta* ausführt. So bedauerlich dieser und der noch schwerere Irrtum, daß die Mathematik auf alle „endlichen Sachen" ihre Anwendung finde, für die Folgezeit war, die Mathematik selber hat hieraus selbst in den Händen Wolfs zunächst einen nicht zu unterschätzenden Vorteil gezogen.

Als erstes entstand aus dem Vorlesungsbedürfnisse ein mathematisches Lehrbuch: „Anfangsgründe aller mathematischen Wissenschaften", Halle 1709, die später erweitert wurden zu den *Elementa matheseos universae* in zwei Bänden, Halle 1713/15, an die sich 1716 das „vollständige mathematische Lexikon" in zwei Teilen anschließt. Es genügt zur Charakterisierung dieser Bücher, die Elemente herauszugreifen: die Widmung an den preußischen

---

1) Vorauf ging nur seine Logik: „Vernünftige Gedanken von den Kräften des menschlichen Verstandes und ihrem richtigen Gebrauch in Erkenntniß der Wahrheit", Halle 1712.

2) E. W. de Tschirnhausen, *Medicina mentis sive artis inveniendi praecepta generalia, Ed. nova*, Lipsiae 1695

Oberhofmarschall und Kurator der Universität legt Zeugnis ab von dem Geiste, in dem WOLF seine Lehrtätigkeit an der Universität auffaßte: *Tum demum de humano genere bene ac praeclare merentur, qui ad erudiendam juventutem Academiis praeficiuntur, si eam ad veritatis amorem, diligentiam et moderationem instituant*; denn das Staatsinteresse ist: *ut juvenes in Academiis discant olim profutura et felicitatis ac tranquillitatis publicae fiant amantes, utque ex iis redeant et mentis acumine pollentes et virtute non minus quam doctrina praestantes.*

Daher WOLFS Devise: *Omnes ingenii nervos intendo ut juventuti proponam et solida et utilia.* Daß dieses die Mathematik ganz besonders leiste, deutet er dann durch das vorgesetzte Motto an, das THEON PLATO in den Mund legt: *Adolescentibus eorumque aetati conveniunt disciplinae mathematicae, quae animam praeparant et defaecant, ut ipsa ad Philosophiam capessendam idonea reddatur.*[1])

Im übrigen kommt die gesamte damals bekannte Mathematik in dem zweibändigen Lehrbuch zur Behandlung, nacheinander: die *Arithmetica, Geometria, Trigonometria, Analysis tam finitorum quam infinitorum, Statica et mechanica, Hydrostatica, Aërometria, Hydraulica, Optica, Perspectiva, Catoptrica, Dioptrica, Sphaerica et Trigonometria sphaerica, Astronomia, Geographia et hydrographia, Chronologia, Gnomonica, Pyrotechnica, Architectura militaris et civilis*; das ganze eingeleitet durch eine *Disquisitio de methodo mathematica,* und abgeschlossen durch eine Übersicht über die Geschichte der einzelnen Schriften resp. Bibliographie: *commentatio de scriptis mathematicis.*

Die „Anfangsgründe" bieten weniger, noch weniger „der Auszug aus den Anfangsgründen aller mathematischen Wissenschaften", Halle 1717. Dies waren die Lehrbücher für die Studierenden, die Elemente das Handbuch der mathematischen Professoren bis in die Mitte des 18. Jahrhunderts. Eine eingehende Kritik dieser Werke ist hier nicht am Platze; es sei nur das Wort A. G. KÄSTNERS hier angefügt, das er in Absicht dieser Lehrbücher einmal ausspricht:[2]) „Deutschland wird den Freyherrn VON WOLF noch mit Hochachtung nennen, wenn die Nahmen der meisten seiner Verächter nur noch in den Insektenverzeichnissen dauern werden, die der Fleiß deutscher Litteratoren sammlet. Es hat ihm für die Ausbreitung der Vernunft, und der Mathematik, die einen so großen Theil der Vernunft ausmacht, sehr vieles zu danken."

---

1) THEONIS SMYRNAEI *philosophi platonici expositio rerum mathematicarum ad legendum* PLATONEM *utilium,* Cap. 1.

2) In der Vorrede zu den „Anfangsgründen der Arithmetik und Geometrie usw.", Göttingen 1758.

Was hier interessiert, ist der damalige Umfang und Inhalt der einzelnen mathematischen Disziplinen; man orientiert sich so am raschesten über das Niveau des mathematischen Unterrichts an den Universitäten des 18. Jahrhunderts. Es stehe daher hier im Auszuge das erste Kapitel eines Werkes, das ein Schüler von Chr. Wolf auf Grund der Wolfschen Bücher verfaßte:[1])

„Die Mathesis ist eine Wissenschaft alles auszumessen/ was ausgemessen werden kan. Da nun alles/ was wir in der Welt antreffen seine Schranken hat/ und daher/ als etwas/ so vermehret/ oder vermindert werden kan/ kan betrachtet werden/ so ist kein Zweifel/ daß sich die *Mathesis* auf alle endlichen Sachen zu erstrecken pfleget.

Es wird dieselbe eingetheilet in *Mathesin puram,* oder *in applicatam.* Die *Pura* handelt von der Größe an und vor sich selbst/ und begreifft die *Geometrie* und *Arithmeticam* in sich. Die *Arithmetica* gehet entweder mit *determinir*ten Zahlen um/ als wie die gemeine Rechen-Kunst/ oder mit un*determinir*ten/ an deren Stelle sie Buchstaben gebrauchet/ als die *Analysis,* oder *Algebra.* Die *applicata* ist diejenige/ so ein gewiß Stücke aus der Natur-Wissenschafft/ oder andern Theilen der *Philosophie,* welches nach der *Mathesi pura* ausgearbeitet worden/ abhandelt/ und hernach in die *Classe* der *Mathemati*schen Wissenschafften bringt z. e. nachdem man die Gesetze des Sehens in Ordnung gebracht/ so ist die *optica* drausgeworden/ da die Eigenschafften der Lufft von dem Herrn *Professor* Wolf *mathemati*sch abgehandelt worden/ so hat er die *mathemati*schen Wissenschafften mit der *Aërometrie* vermehrt/ und so weiter mit den übrigen Wissenschafften/ die in nachfolgenden sollen abgehandelt werden.

Der Grund aller *Mathemati*schen Wissenschafften/ worauff die übrigen gebauet sind/ ist wohl ausser zweiffel die Arithmetica oder gemeine Rechen-Kunst/ da man aus einigen bekandten Zahlen/ andere unbekandte finden lernet. Sie lehrt einem die gewöhnlichen fünf *Species*, nehmlich *numerir*en/ *addi*ren/ *subtrahi*ren/ *multiplici*ren/ und *dividi*ren/ welche zusammen in zweyerley Arten gebracht können werden/ nehmlich zu Zusammensetzung und Verminderung der Zahlen. Sie zeiget solche sowohl in gantzen als in gebrochenen/ in benannten als unbenannten Zahlen. Ferner erkläret dieselbe die Natur und Eigenschafften der *arithmeti*schen und *geometri*schen *Progression,* daraus die bekante *Regula de tri,* und übrigen aus der *Regul de tri* zusammen gesetzten Reguln entspringen. Und endlich zeiget sie auch/

1) Derer Mathematischen Wissenschafften Beschaffenheit und Nutzen, den sie in der Theologie, Jurisprudenz, Medicin, Philosophie, auff Reisen, und im gemeinen Leben haben, wie auch ihre Vertheidigung wieder die gewöhnliche Einwürffe vorgestellet von Julio Bernhard von Rohr, Halle im Magdeburg. A. MDCCXIII.

wie man aus den Zahlen die *Quadrat* und *cubi*sche Wurtzel herausziehen soll/ und bey der *Regul de tri* einige Vortheile anbringen kan/ welche insgemein die Welsche *Practica* genennet werden.

Die GEOMETRIE handelt von der Meßung des Raumes/ den die cörperlichen Dinge nach ihrer Länge/ Breite und Dicke einnehmen. Sie fänget von dem *mathemati*schen Punkte an/ gehet von diesem zu den Linien/ untersuchet derselben Eigenschafften/ und beschreibet allerhand Arten dieselben zusammen zu setzen/ biß sie endlich auf die Cörper komt. Erst erkläret dieselbe alle die Wörter/ die in der gantzen Wissenschafft vorkommen/ hernach erzehlet dieselbe die Grundsätze/ derer sie sich in folgenden zu bedienen pfleget/ biß sie endlich von diesen auf die Lehrsätze und Aufgabe kömt/ und alle ihre Sätze werden allezeit aus den ersteren vollkommen erwiesen. Es wird die *Geometrie* eingetheilet in die Gemeine und in die Höhere/ die Gemeine handelt von den geraden Linien/ dem Circul und denen *Figu*ren und Cörpern/ welche sich durch diese Elementa beschreiben lassen; die Höhere aber von den krummen Linien/ als von der *parabel*, *hyperbel*, *ellipsi* etc. Ferner läst sie sich eintheilen in die *theoreti*sche und die *prakti*sche. Die *Prakti*sche weist das Feldmessen an mit unterschiedenen *Instrumen*ten/ als dem *Quadran*ten/ Jacobs Stabe/ *Astrolabio, Boulsole* u. s. w. oder auch nur mit den Stäben und der Meßkette/ sie zeiget wie man die Höhen und Tiefen messen/ die Fässer *visi*ren soll u. s. f. Die *theoreti*sche aber beschreibet nur die Natur und Eigenschafften derer Linien/ Fläche und *mathemati*schen Cörper. Es ist die *Geometrie* die Quelle/ daraus die übrigen *mathemati*schen Wissenschafften hergeflossen/ und kan in der Kunst und Erforschung der Natur ohne die *Geometrie* wenig ausgerichtet werden/ wie denn ihr vortreflicher Nutzen unten mit mehreren wird zu sehen seyn.

Die ANALYSIS lehret/ wie man die *mathemati*schen Wahrheiten durch sich selbst erfinden soll. Worinnen der Alten ihre *Analysis* bestanden/ erhellet aus den Schrifften/ welche PAPPUS in der Vorrede über das siebende Buch seiner *Collectionum mathematicarum* ausführet/ darunter zu erst des EUKLIDIS *data* gesetzt werden; nehmlich sie nahmen das meiste aus Betrachtungen der Figuren/ und gelangten also durch vieles Nachsinnen und weitläufftige *Deductiones* zu dem/ was sie suchten. Die neueren haben die *Analysin* auf eine Art der Rechnung gebracht/ und wird selbige insgemein die *Algebra* genent/ wiewohl eigentlich zu reden die *Algebra* nicht die gantze *Analysin* ausmacht/ sondern nur einen Theil derselben/ welcher von den Gleichungen handelt. Man rechnet nehmlich heut zu Tage zu der *Analysi*, die *Arithmeticam speciosam* oder Buchstaben Rechnung/ da durch auch ohne die *Algebra* viel *mathemati*sche Wahrheiten gleichsam spielende

gefunden werden. Ferner gehöret hieher die *Algebra*, welche lehret/ wie man die vorgegebenen *mathemati*schen Fragen durch *aequationes* auflösen soll/ indem man nehmlich eine Sache auf zweyerley Art auszudrücken sich bemühet/ und durch gehörige *Reductiones* den Werth des unbekandten durch lauter bekandte Dinge *exprimi*ret. Man ziehet hierher die *Arithmeticam infinitorum*, da man unendliche Reihen Brüche *summi*ret/ oder wenigstens die Verhältnisse einer Reihe zu der andern suchet/ wodurch auch vieles in der höheren *Geometri praesti*ret wird. So gehöret auch hierher die *differential*, und *Integral*-Rechnung des Herrn von Leibnitz/ dadurch die höheren Wahrheiten in der *Mathematic* erfunden werden/ die sonst durch die gemeine *Analysin* entweder gar nicht/ oder doch durch viele Umwege gefunden werden. Es bedienet sich aber dieselbe der unendlich kleinen Größe/ wodurch zwey endliche von einander unterschieden sind/ und siehet man in der *differential*-Rechnung den unendlich kleinen Unterschied veränderlicher Größe; in der *Integral*-Rechnung *summi*ret man unendliche Reihen unendlich kleiner Größe/ welches alles hier deutlich zu erklären/ nicht möglich ist."

So weit die reine Mathematik, der die praktische Geometrie (d. h. das Feldmessen) noch zugerechnet. Erst Joh. A. Segner (1704—1777) und nach ihm A. G. Kästner trennen in ihren Lehrbüchern wieder streng reine und praktische Geometrie. Der Fortschritt, der hierin lag, wird im folgenden noch klar hervortreten. An dieser Stelle sei nur betont, daß der Kanon der (später so genannten) Elementarmathematik hier schon festgelegt ist: Das gewöhnliche Zahlenrechnen wird, als Arithmetik bezeichnet, der Mathematik zugezählt, die ihre vornehmste Ausbildung nach Seiten der Geometrie nimmt, nur wenige Teile der „Analysis", soweit sie mit den elementaren Methoden behandelt werden können, werden in die Elementarmathematik aufgenommen. Überhaupt aber ist für die Trennung nicht sowohl der Stoff als die Methode maßgebend. *Sublimior Mathesis h. e. Algebra seu analysis mathematicorum utpote qua doctrinas mathematicas investigandi atque ulterius promovendi artificia continentur*, sagt ein anderer Wolfianer, Jo. Nic. Frobesius (1701—1756).[1])

Das Bild Bernh. von Rohrs über die *Mathesis applicata* fehle der Kürze wegen. Es verdient aber hervorgehoben zu werden, daß gerade der angewandten Mathematik die Wertschätzung zu danken war, die die Mathematik überhaupt bei den „Großen" fand: die Mathematik ein Mittel zur bequemeren Herrichtung der Lebensumstände ist ein oft wiederkehrendes

---

1) Jo. Nic. Frobesi *Historica et dogmatica ad Mathesin introductio, qua succincta matheseos historia cum ceteris eiusdem praecognitis nec non systematis mathematici delineatio compendio* Wolf*iano accommodata continentur,* Helmstad. 1750, p. 142.

Motiv jener Zeit. So heißt es z. B. bei LEONH. CHR. STURM (1669—1719), *Tractatus de natura et constitutione Matheseos,* Francf. 1706, p. 135 speziell von der Mechanik: *Finge eam plane abolitam bella caeco marte ducenda, ferorum conflictionibus similia fient, e palatiis homines ad speluncas, ex hortis in horridos saltus iterum migrabunt, de limitibus aeterna erunt litigia, infinitae caedes, inexplicabilis confusio.* Nur muß man nicht glauben, daß hier eine auf vernünftigen Einsichten basierte Anwendung der Mathematik empfohlen wurde, es war nicht viel mehr als ein handwerksmäßiger Betrieb der Mechanik resp. der Mathematik, der hier gemeint ist. Erst als der Rationalismus mit seiner Schätzung und Bewertung der Mathematik als Mittel zur Schärfung des Verstandes und Regulierung des Willens seine Mission erfüllt hatte, konnte eine spätere Zeit den Wert der Mathematik in einer vernünftigen Anwendung sehen; „praktisch" im Sinne von „nützlich" wird erst das Schlagwort der Aufklärung. —

Und nun noch zum Schluß eine kurze Orientierung über die zweite Universitätsgründung des Rationalismus. Den ersten Anlaß zur Gründung der Universität Göttingen mag ein dynastisches Interesse gegeben haben. Der Herzog von Hannover hatte 1692 die 9. Kurwürde erhalten, seit 1714 war der Kurfürst gleichzeitig König von Großbritannien; es war natürlich, daß Kurhannover Rivale Kurbrandenburgs in Deutschland wurde; ein Symptom dieses Rangstreites wurde u. a. auch die Meinung, es vertrüge sich mit der Würde des Landes nicht, die eigenen Landeskinder auf fremden, insbesondere preußischen Universitäten ausbilden zu lassen, vielmehr sei es Pflicht, durch Heranziehung der Untertanen der kleineren Länder auf eine eigene Universität auf jene einen maßgebenden Einfluß zu gewinnen. So war die Gründung der Universität Göttingen zum großen Teil ein politischer Akt. Aber die Ausgestaltung des Planes und die allmähliche Inauguration war wesentlich in die Hand eines Mannes gelegt, der mit einem feinen Verständnis für die Bedürfnisse der Zeit zugleich „den festen Glauben an die Epoche des Fortschritts und der Entfaltung der deutschen Geistesbildung"[1]) verband, sodaß er in Göttingen Einrichtungen schuf, die einem veränderten Zeitgeiste leicht Rechnung trugen oder doch tragen konnten.

Zunächst war GERLACH ADOLF VON MÜNCHHAUSEN[2]) soweit Kind seiner

---

1) Eine Orientierung über die Gründungsgeschichte gibt die Quellensammlung: EMIL F. ROESSLER, Die Gründung der Universität Göttingen. Eine Sammlung bisher ungedruckter Entwürfe, Berichte und Briefe, Göttingen 1855.

2) GERLACH ADOLF Freiherr VON MÜNCHHAUSEN wurde am 14. Okt. 1688 zu Berlin geboren, studierte 1707 zu Jena, 1710 zu Halle, 1711 zu Utrecht und wieder zu Jena; ging 1712 auf Reisen, bekleidete mehrere Verwaltungsposten (1714 Appellationsrat zu Dresden, 1715 Oberappellationsrat zu Celle, 1726 kurbraunschweigischer Komitialgesandter zu Regensburg), bis er am 25. Mai 1728

Zeit, daß auch er die Universität in erster Linie als Bildungsstätte guter Staatsbeamten ansah, als Pflanzstätte für brauchbare gelehrte Bildung, aber doch schon frei von jeglicher Bevormundung durch die Theologie: der Streit des Pietismus und Rationalismus in Halle lehrte ihn, wie notwendig eine solche Trennung war. Eine durchgreifende Umgestaltung und Neuordnung des Universitätsbetriebes aber lag daher nicht in seinem Sinne.[1]) Er suchte nur die kleineren Übel, die er aus eigener Erfahrung an den Universitäten kannte und die sich besonders in dem gänzlichen Fehlen eines „gebildeten Tons" in dem Verkehr sowohl der Dozenten wie der Studierenden offenbarten, zu heilen, ohne darum „den ganzen Rost vergangener Jahrhunderte, der sich an die Universitäten angesetzt und der gewissermaßen durch den 30jährigen Krieg eine Grenze gefunden hatte, zu beseitigen".[2])

Aber in der Form, wie er den Übelständen auf den andern Universitäten zuvorkam, lag doch für später die Möglichkeit, eine gesundere Umgestaltung der Universitäten zu erzielen. Der wüste Pennalismus der Studierenden wurde dadurch vermieden, daß von Münchhausen die Söhne der Adeligen und Fürsten, die früher auf besonderen Ritterakademien ihre Bildung erhielten, auf die Universität zu ziehen wußte; die früher oft aus kleinlichen Anlassen entstandenen Zwistigkeiten unter den Professoren suchte er dadurch unmöglich zu machen, daß er das Kollegium aus Angehörigen der verschiedensten Nationen zusammensetzte, insbesondere aber dadurch, daß er der Berufstätigkeit der Professoren einen neuen Inhalt gab, indem er es ihnen zur Pflicht machte, neben ihrer Unterrichtstätigkeit eine Forschertätigkeit auszuüben, wobei er ihnen dann die weitestgehende Zensurfreiheit einräumte: schon in den kgl. Privilegien der Universität vom 7. Dez. 1736[3]) heißt es, daß „die Professoren zu ewigen Zeiten vollkommene unbeschränckte Freyheit, Befugniß und Recht haben sollen, öffentlich und besonders zu lehren, respective *Collegia publica* und *privata* zu haben, *Actus* und *Exercitia publica, disputando* und sonst anzustellen usw., was ihnen beliebe". Diese publizistische Tätigkeit suchte von Münchhausen

---

wirklicher Geh. Rat zu Hannover wurde. Von 1734 bis zu seinem Tode 26. Nov. 1770 war er Kurator der Universität.

1) Von Münchhausen behielt die traditionelle Vierteilung in die verschiedenen Fakultäten bei, und war u. a. insbesondere darauf bedacht vom Kaiser Karl VI. in dem Bestätigungsbriefe alle Privilegien, wie sie die andern Universitäten besaßen, Dichterkrönung usw. auch für Göttingen zu sichern. (Vgl. *Privilegia Caesarea Academiae Georgiae Augustae concessa de dato* 13./1. 1733 bei Chr. Herm. Ebhardt, Sammlung der Verordnungen für das Königreich Hannover aus der Zeit vor dem Jahre 1813, Bd. 2, Hannover 1855, p. 782.)

2) E. Beurmann, Die 3 Septembertage der G. A. im Jahre 1837.

3) Vgl. Chr. Herm. Ebhardt, l. c., p. 791.

dann insbesondere durch die Einrichtung und glänzende Ausstattung einer Bibliothek, die gleichmäßig den Professoren und Studierenden im weitesten Umfange zu freier Benutzung zur Verfügung stand, zu fördern. Sie trug nicht wenig dazu bei, die junge Göttinger Universität gleichzeitig in den Ruf einer „gelehrten" Universität zu bringen. Auch suchte er die Professoren zur Herausgabe einer periodischen Zeitschrift nach Art der Leipziger *Acta Eruditorum* zu bewegen.[1]) Was allerdings zunächst nur entstand, war ein referierendes Blatt: die Göttinger gelehrten Anzeigen.

Diese kurzen Andeutungen genügen schon, um erkennen zu lassen, daß hier einer alten Institution ein neuer Lebensimpuls, der alten Form ein neuer Inhalt gegeben wurde, den jene nur aufzunehmen brauchte, um dann aus sich heraus sich zu neuem harmonischen Leben zu erheben. Und in der Tat mag man es als erste Frucht dieser Bemühungen von Münchhausen ansehen, daß aus dem Schoße der Universität heraus die Anregung zur Einrichtung einer kgl. Societät der Wissenschaften[2]) kam, die die Bereicherung der Wissenschaften mit neu entdeckten Wahrheiten zum Gegenstande haben sollte und bei der ausgeschlossen war „1. alles bereits im Cathedervortrag begriffene, 2. alles bloß Speculative und auf metaphysische Begriffe sich gründende", so daß „die Richtung der Beschäftigungen der Societät in dem Anwendbaren, wirklich für das Leben Nützlichen, durch angestellte Versuche, Erfahrung, Prüfung Erprobten, also in dem, was in die Fächer der mathematischen und physischen Wissenschaften gehört" gefunden war.[3]) —

---

1) Hierüber eine Akte im Kuratorialarchiv: „betr. Herausgabe einer periodischen Zeitschrift".

2) Die erste Anregung ging von dem 1750 aus Halle nach Göttingen berufenen Professor der Philosophie Andreas Weber aus. Nach Roessler l. c. hat aber der spätere Kanzler der Universität Lorenz von Mosheim (1694—1755) schon 1734 auf die Gründung einer solchen Gesellschaft aufmerksam gemacht.

3) Vgl. Christian Gottlob Heyne, biographisch dargestellt von A. H. L. Heeren, Göttingen 1813. Hier findet sich von pg. 119—124 ein Aufsatz von Heyne, den dieser „nicht lange vor seinem Tode" verfaßte und in dem er „seine Ansicht der Societät und seine Verhältnisse zu ihr" darzulegen Gelegenheit hatte. Diesem Aufsatz sind die angeführten Stellen entnommen.

Weil interessant und manche der obigen Ausführungen belebend stehe hier folgendes aus dem Urteil des damaligen Oberappellationsrates Günther von Buenau in Celle über eine an der Göttinger Universität zu errichtende Gesellschaft der Wissenschaften (Akte des Kuratorialarchivs: „betr. Einrichtung der kgl. Societät der Wissenschaften"): „Daß die in verschiedenen Ländern bißhero geschehenen Einrichtungen gewisser Academieen und Gesellschaften der Wissenschaften von großem Nutzen gewesen, daran lässet uns die tägliche Erfahrung nicht zweifeln. Das eintzige Königreich Frankreich könnte uns hiervon eine hinlängliche Probe an die Hand geben. Und ich zweifle fast, daß K. Ludwig

Jedoch die Gründung der Gesellschaft der Wissenschaften führt schon aus der Zeit des Rationalismus hinaus. Man braucht, um dies zu fühlen, nur Bünaus Worte aufmerksam zu lesen; insbesondere aber zeigt sich dies auch in dem starken Betonen des historisch-philologischen Elements bei der näheren Ausgestaltung des Gründungsplanes. Heynes Worte sind hier: „ohne Geschichtskunde dessen, was im Studium jeder Wissenschaft vorausgegangen ist, also ohne Litteratur ist keine vollkommene Wissenschaft möglich. Diese, nicht die neuere Geschichte, nicht die Compendiengeschichte ward die Aufgabe der historischen Classe der Societät." Joh. Matth. Gesner (1691—1761) war das erste Mitglied dieser Klasse und Chr. Gottlob Heyne (1729—1812) sein Nachfolger, zwei Männer aus deren Lebensarbeit nicht zum mindesten jene gewaltige Um- und Neugestaltung des ganzen Universitätsgeistes am Ende des 18. und am Anfang des 19. Jahrhunderts hervorgegangen ist: ihr Studium des Altertums hat dem Neuhumanismus vorgearbeitet, dessen Ideal die allseitige harmonische Bildung des Menschen, die freie Betätigung aller Gemüts- und Geisteskräfte wurde. Aber dieser Gedanke erhält erst im vierten Kapitel seine Ausführung. Vorauf geht die Darlegung der Ausgestaltung, welche die Mathematik des Rationalismus und der Aufklärung in Göttingen fand.

---

der XIV^te^ durch seine siegreichen Waffen sein Reich zu den itzigen Flor, Ansehen und Macht gebracht haben würde, wenn nicht Richelieu, Colbert und Louvois durch ihren Eyffer für die guten Wissenschaften, Handel und Wandel und die Haushaltungskunst als die beyden mächtigsten Stützen eines beglückten Staates zu einem höheren Grad der Vollkommenheit zu führen so glücklich und nützlich bemüht gewesen wären.

Rußland hat der Einführung auswärtiger Gelehrten und der damit verknüpften Cultur der Wissenschaften die Entreißung aus der Barbarey und ihrer gantzen itzigen Verfassung zu danken. In Schweden bringen die verschiedenen gelehrten Ausarbeitungen so in diesen Landen bißhero häufiger, als jemahls erschienen, Hof, Städte und den Landmann in eine gewisse eyffersüchtige Bewegung, welche dieses Land in kurtzem aus einer bißherigen Finsterniß in Vielen Stücken reißen und in wenigen Jahren in eine gesegnete Aufnahme ohnzweifelhaft versetzen wird.

Und was haben wir nicht endlich noch uns im Voraus von denen benachbarten Brandenburgischen Landen in diesen Stücken für ausnehmende Wirkungen zu versehen, da deren weises und Staatskluges Oberhaupt das Glück und die Macht seiner Waffen nicht für hinlänglich hält seine Landen zu der gesuchten Vollkommenheit zu bringen, sondern auch die Erfahrungen und Betrachtungen gelehrter Leute als die zuträglichsten Mittel für die Aufnahme und das Wachstum anzusehen und zu gebrauchen pfleget.

Es ist also ohnstreitig die Einrichtung einer Academie guter und NB. brauchbarer Wissenschaften nicht nur eine wahre Zierde eines jeden Landes, sondern auch . . . ."

Zweites Kapitel.

Die Mathematik des Rationalismus in Göttingen.

Joh. Andr. Segner und Joh. Friedr. Penther.

In den Kreis von Gelehrten, in dem Gottl. Sam. Treuer der philosophischen Fakultät als *professor juris publici*, Chr. Aug. Heumann als *prof. hist. litt.*, Joh. Matth. Gesner als *prof. eloquentiae et poës.* und Sam. Chr. Hollmann als *prof. dog. metaphys. pneumatolog. et theol. nat.* angehörten, suchte G. A. von Münchhausen G. Erh. Hamberger aus Jena, „den letzten folgerichtigen Vertreter eines medizinischen Systems, dessen Epoche in die Mitte des 17. Jahrhunderts fällt“,[1]) als *prof. phys. et math.* zu berufen. Als diesem der Abschied nicht bewilligt wurde, berief er dessen Schüler, den *Doctor medicinae* und *prof. extraordinarius* Johann Andreas Segner.

Einundzwanzig Jahre alt, war Segner 1725 zum Studium der Philosophie, Mathematik uud Medizin nach Jena gegangen.[2]) Nach zweijährigem Aufenthalt in Jena war er in der Lage, mathematischen Unterricht zu erteilen und öffentlich von seinen mathematischen Fähigkeiten in der *Dissertatio epistolica ad G. E. Hambergerum, qua regulam Harrioti de modo ex aequationum signis numerum radicum tam verarum quam spuriarum eas componentium, cognoscendi, demonstrare conatur* Jo. Andr. Segner, Jenae 1728 Zeugnis abzulegen.[3]) Dies war der erste Beweis des heute als Descartes' Zeichenregel

---

1) C. Justi, Winckelmann, sein Leben, seine Werke und seine Zeitgenossen, Teil 1, Leipzig 1866, p. 96.

2) Einige nähere Daten, insbesondere über Segners Jugend findet man bei J. Chr. Strodtmann, Geschichte jetztlebender Gelehrter 12. Teil, Celle 1747, p. 329 ff., J. Chr. Strodtmann, Neues gelehrte Europa 5. Teil, Wolffenbüttel 1754, p. 202 ff., und F. C. G. Hirsching, Historisches literarisches Handbuch berühmter und denkwürdiger Personen, welche im 18. Jahrhundert gelebt haben, Leipzig 1813 ff. sub J. A. Segner. Daraus folgende Angaben: Segner wurde geboren am 9. Okt. 1704 in Preßburg, wohin seine Vorfahren aus Steiermark eingewandert waren. Bis zum Jahre 1722 genoß er den Unterricht auf dem Preßburger Gymnasium und von seinem 16. Jahre an speziell in der Mathematik den Unterricht des kaiserlichen Mathematikers Sam. Mikowini (bekannt wegen seiner Landkarte von Ungarn in M. Bels *Notitiae Hungariae novae,* Wien 1735). 1722 ging er auf ein Jahr nach Debreczin, um einen jungen Edelmann in der deutschen Sprache zu unterrichten, 1722 kehrte er nach Preßburg zurück, um sich für das medizinische Studium vorzubereiten; insbesondere arbeitete er in einer Apotheke, wo er sich auf das Studium der damals noch sehr vernachlässigten Chemie legte.

3) Merkwürdig ist, daß diese Schrift in allen literarischen Nachweisen als aus dem Jahre 1725 stammend angegeben wird. Die Arbeit selbst trägt das

bekannten Satzes; Segner modifizierte ihn später und ließ ihn in die *Mém. de l'Acad. de Berlin* 1756 einrücken, in welcher Form er bis in den Beginn des 19. Jahrhunderts bekannt geblieben ist. Aber vorläufig dachte Segner noch an kein Lehramt an der Universität. Er promovierte 1730 mit einer Dissertation *de natura et principiis medicinae* zum Doctor medicinae, worauf er in seine Vaterstadt Preßburg und bald darauf nach Debreczin ging, um an diesen Orten zu praktizieren. Erst im Oktober 1732 kehrte er nach Jena zurück, erwarb sich dort den Magistertitel, um seine mathematischen Lehrstunden am schwarzen Brett der Universität bekannt machen zu können, und erhielt schon nach einem Jahre eine außerordentliche philosophische Professur. Specimina seiner Erudition aus dieser Zeit, in denen er sich als selbstdenkenden und kritischen Kopf zeigte, sind zwei kleine philosophische Schriften: *Dissertatio prima et secunda de syllogismo,* aus der später seine Logik: *Specimen logicae universaliter demonstratae,* Gottingae 1741 entstanden ist; eine physikalische Schrift ist das beim Antritt der außerordentlichen Professur verfaßte *Programma de mutationibus aëris a luna pendentibus* 1733.[1])

Vom 31. Aug. 1735 ist die Bestallungsurkunde Segners als Professor in Göttingen datiert; am 16. Nov. 1735 machte er bereits von Göttingen aus nach der damaligen Sitte in einem Programm[2]) seine Vorlesungen be-

---

Datum VII Sept. Anni MDCCXVIII. Dies ist aber offenbar ein Druckfehler. In den „Leipziger gelehrten Zeitungen für das Jahr 1728" wird die Arbeit Segners als im Sept. erschienen aufgeführt. Jedoch erwähnt Fr. W. Stuebner, *Theorema Harriotti de numero radicum verarum et falsarum,* Lipsiae, pg. 41, daß Segner *iam ante duodecim annos* einen Beweis gegeben habe. Stuebners Arbeit erschien 1730; auf dem Exemplar, das mir vorliegt, heißt es CIↃIↃCCXX, dem ein X mit Tinte zugesetzt ist. (Nachträglich bemerke ich, daß der Katalog des *British Museum* tatsächlich die Jahreszahl 1728 gibt.)

1) Vgl. hierüber die Arbeit S. Günthers, *Note sur* Jean-André de Segner, *fondateur de la météorologie mathématique,* Bulletino di bibliografia e di storia delle scienze matematiche e fisiche 9 (1876), p. 27 ff.

Ein Verzeichnis der Schriften Segners überhaupt u. a. bei Joh. Steph. Pütter, Versuch einer akademischen Gelehrtengeschichte von der Georg Augusts Universität zu Göttingen, Bd. 1, Göttingen 1765, p. 24 ff., und dasselbe Teil 2, Göttingen 1788, p. 43 (im folgenden kurz zitiert als Pütter, Gelehrtengeschichte) und bei Joh. Georg Meusel, Lexikon der vom Jahre 1750 bis 1800 verstorbenen deutschen Schriftsteller, Bd. 13, Leipzig 1813, p. 43 ff.

Wieweit diese Verzeichnisse vollständig, stehe dahin; es fehlt z. B. der Hinweis auf eine Disputationsschrift 1732: *De speculis Archimediis.*

2) *Pressiones quas fila corporibus certis circumducta et utrinque a viribus aequalibus tracta in ea corpora exercent et Lineas in eorum corporum superficiebus describendas quibus imposita eo modo fila quiescunt universaliter considerat eademque Lectiones publicas atque privatas hoc semestri hyemali divino auxilio, a se habendas*

kannt. Auf 22 Seiten in 4^{0} untersucht er das Problem der geodätischen Linien (*lineae quietis*) auf Rotationsflächen: er stellt die Differentialgleichung der geodätischen Linien auf und findet das Integral, das schon vor ihm (1732) ALEXIS-CLAUDE CLAIRAUT bekannt gemacht hatte und nach diesem als CLAIRAUTsches Theorem bezeichnet wird. SEGNER selbst hat diese Arbeit nicht gekannt, er zitiert nur BORELLUS, WEDELIUS und VARIGNON, *prout sum in libris modice versatus.* Auf weiteren 4 Seiten folgt dann die Ankündigung seiner Vorlesungen mit einer kleinen Exposition seiner Auffassung über Charakter und Wert der Mathematik. Diese verdient hier im Auszuge eine Stelle, da sie am besten über SEGNERS wissenschaftliche Persönlichkeit orientiert und ahnen läßt, daß hier ein Mann spricht, der seiner Fähigkeit sich bewußt, seiner Wissenschaft auf der Universität Anerkennung zu verschaffen bestrebt war, der aber ganz im Sinne des Rationalismus für sie den propädeutischen Wert der Mathematik noch zu stark betont. Mit Bezug auf die vorangeschickte Abhandlung heißt es: *haec sunto, quae, cum munus auspicor, Mathesin atque Physicam publice docendi, a* .... GEORGIO II ..... *mihi indulgentissime demandati, proponenda fuere. Quae quidem non eo suscepi animo, ut Vos erudirem, Juvenes Generosissimi ac Nobilissimi, qui nunc demum divinae matheseos sacris initiamini;* dazu wäre eine leichtere Materie am Platze gewesen, sondern er wählt einen schwierigeren Stoff, um zu zeigen, wie nützlich die Mathematik bei Lösung mechanischer und überhaupt physikalischer Aufgaben sei: *ut pertractato aliquo themate haud omnino vulgari, Vobis ostenderem, quantus sit mathematum usus in iis omnibus determinandis, quae a viribus proficiscuntur in corpora agentibus, quocunque modo comparata; quamque expeditas hodie vias noscamus, ad solutionem difficilium in hoc genere problematum universalissimam, perveniendi. Unde pronum est concludere, quod nemo dubitat, carere non posse eius scientiae cognitione, qui corpora nosse cupiat penitius, et quae eis a viribus utcunque agitatis, contingunt, adcurate perspicere: qua in re scientia physica tota versatur.* Aber dies heißt nur erst nach einer Seite den Wert der Mathematik bestimmen. Er fährt deshalb fort: *Nihil de eo, quod de quantis omnino omnibus ferendum est, iudicio, quoque vel in scientiis constituendis, vel in vita commode agenda, carere prorsus non possumus, iam attuli; nihil de cultura ingenii, et inprimis facultatis ratiocinandi, quae ex geometriae studio, non fallente spem eventu, expectatur, et ob quam magni viri, provectiore etiam aetate, ad has disciplinas sese contulere* (BAYLE *Dictionaire hist. et crit. Art.* HOBBES, *not. D*); *nihil de eo habitu, quem sensim apud nos haec studia producunt, non decidendi,*

---

indicat JOANNES ANDREAS SEGNER, *philosophiae et medicinae Doctor ac philosophiae naturalis et mathematum in Regia Gottingensi professor,* Gottingae apud Abramum Vandenhoeck.

nisi de iis quae clare cognovimus: quod vel ea re, quod modestos nos reddat, atque vanum, quidquid in buccam venerit, effutiendi pruritum, compescat, commendare nos cordatis viris, mirum in modum potest, also Bildung des Urteils und Verstandes, Übung von Besonnenheit und Bescheidenheit. Durch die Schwierigkeiten aber braucht sich niemand abschrecken zu lassen; denn *facilia, cognita cuilibet, nec in dubium revocanda sunt principia, quibus hae disciplinae nituntur: nec mens ullibi, brevi adeo et expedita via, a tenuissimis initiis, ad summum, quod attingere potest, fastigium deducitur* und dann vor allem: *nec ego quidquam a me desiderari patior, quod a ductore expectare possitis fideli: neque enim praeceptore, sed ductore hic opus est. Quidquid novi, quidquid vel auditione, vel lectione vel meditatione adsequutus sum, vel in posterum indefesso studio adsequar, id omne, eo ordine quo vos ducentem inprimis sequi posse putabo, ut solitus sum semper, Vobiscum communicabo,* also eine Auffassung des Lehramts, wie sie in jener Zeit nur einer aussprechen konnte, der fühlte, daß er selber ein schöpferischer Geist war. —

Das Folgende hat auszuführen, wie Segner dieses sein Programm ausgeführt hat oder besser hat ausführen können. Um hier verständlich zu werden, muß eine kurze Bemerkung über die innere Organisation der philosophischen Fakultät, in der Segners Lehrfach eine so bedeutende Rolle einnahm, vorausgehen.

Ordinem Philosophorum constituant Decanus, Senior caeterique Professores ordinarii, qui quamcunque Sapientiae partem, facultatibus superioribus ex institutis maiorum non attributam, publice docent lautet der erste Paragraph der Statuten der philosophischen Fakultät.[1]) Diese den oberen Fakultäten nicht angehörenden Teile der Gelehrsamkeit waren (nach vollkommener Konstituierung der Fakultät) folgende acht: das *ius publicum, ius naturae et gentium,* die *historia litt., historia, eloquentia et poesis, logica et metaphysica,* die *linguae orientales* und die *mathesis et physica,* und ihre ersten Vertreter der Reihe nach Gottl. Sam. Treuer, Joh. Jac. Schmauss, Chr. Aug. Heumann, Joh. Dav. Koehler, Joh. Matth. Gesner, Sam. Chr. Hollmann, Joh. Friedr. Cotta und Joh. Andr. Segner. Von ihnen waren gleich anfangs (oder infolge späterer Beförderung) in oberen Fakultäten: Treuer und Schmauss in der juristischen, Heumann und Cotta in der theologischen, Segner in der medizinischen Fakultät, in welchem Umstande am besten auch für Göttingen äußerlich der propädeutische Charakter der philosophischen Fakultät zum Ausdruck kommt. Und in der Tat zeigt das Studium

---

1) Akten der philos. Fakultät *(Liber statuorum, Statuta facultatis philosophicae,* cap. 1).

der Fakultätsakten, wie die Professoren oft selber ein Amt in der philosophischen Fakultät nur als eine Anwartschaft für ein solches in einer der oberen Fakultäten ansahen. Es war für sie keine angenehme Aufgabe, durch einleitende Vorlesungen einer ungleichmäßig vorgebildeten Menge von jungen Leuten die ersten Elemente wissenschaftlichen Denkens und wissenschaftlicher Arbeit beizubringen, um sie danach der Mehrzahl nach zu dem Besuch der Kollegien der Professoren der höheren Fakultäten zu entlassen und nur einige wenige, die sich der akademischen Laufbahn widmen wollten, weiter auszubilden. Dies begann erst anders zu werden, als unter Gesners Leitung das hannoversche Schulwesen eine Reorganisation erfuhr[1]), womit einerseits für das Universitätsstudium schon in den Schulstudien eine gesunde Basis gelegt wurde, andererseits die philosophische Fakultät allmählich die Ausbildung der Lehrer allein übernahm, indem es bislang noch immer eine natürliche Folge der der Theologie zugestandenen Bevormundungsrechte war, daß die Lehrer an den Schulen Kandidaten der Theologie waren, die aber wegen der schlechten Besoldung eine solche Lehrstelle nur als Durchgang zu einer guten Pfründe ansahen. Joh. Matth. Gesner gründete daher gleich anfangs (schon 1739) in Göttingen das erste philologische Seminar, in das jährlich 9 Studierende aufgenommen wurden, die nach seiner Anweisung ihre Studien einzurichten hatten. Dabei war von einer Begünstigung philologisch-historischer Disziplinen gegenüber den mathematisch-naturwissenschaftlichen noch keine Rede; von den Mitgliedern des Seminars wurde „des Hören eines *Cursus mathematicus,* in welchem zum wenigsten Rechnen und Meßkunst, allgemeine Astronomie und Mechanik tractiert werde“, verlangt.[2])

Neben diesen öffentlichen Vorlesungen[3]) der Professoren, zu deren Abhaltung sie berufen und verpflichtet waren, standen in Göttingen gleich an-

---

1) Vgl. Joh. Matth. Gesner, Schulordnung für die Churf. Braunschweig-Lüneburgischen Lande, 1738.

2) Vgl. den Artikel über Mathematik in K. A. Schmid, Encyklopädie des gesamten Erziehungs- und Unterrichtswesens, Bd. 4, 2. Aufl., Gotha 1881 (Verfasser: A. Tellkampf und H. Bertram). Dazu heißt es: „Die Rücksicht auf praktische Anwendung der Mathematik scheint übrigens zu jener Zeit bei weitem mehr, als die Anerkennung ihrer pädagogischen Bedeutung, das Motiv zu ihrer Aufnahme in höhere Lehranstalten gewesen zu sein“.

3) Über sie heißt es in den Statuten: *singuli professores quatuor minimum horas per hebdomadem doceant in Auditorio publico eam displinam, quam docere iussi sunt* und weiter *providento professores cura omni et diligentia, ut intra semestre spatium recitationes suas in doctrinam quamdam vel scientiam ad finem perducant, quo auditoribus occasio subministretur pergendi strenue in cursu studiorum, novisque disciplinis operam navandi.*

fangs ausgedehnte Privat- und Privatissime-Vorlesungen, über die die liberalsten Bestimmungen galten: *professor privatam operam ipsi collocare liceat, in quacumque disciplina philosophica, cuius tradendae occasionem nactus fuerit*[1]), und *gaudeant professores omnes honesta quadam dicendi sentiendique libertate, dummodo abstineant doctrinis, quae pietatem, rem publicam et bonos mores laedunt.* Diese Privatvorlesungen, auf die der Dozent im Laufe der Zeit immer mehr Gewicht legte und die auch die Studierenden erfahrungsgemäß immer mehr und vor allem regelmäßiger besuchten („weil sie sie bezahlen", wie es oft in den Akten heißt) verdrängten allmählich die öffentlichen Vorlesungen, in denen nur noch über die eine oder die andere allgemein interessierende Frage gelesen wurde. Man muß daher auch schon für diese Zeit auf die Privatvorlesungen zurückgreifen, um ein richtiges Bild der Lehrtätigkeit eines Professors zu bekommen. Dies trifft vollkommen zu natürlich für die Zahl der außerordentlichen Professoren, Adjunkten und *Magistri legentes*, die ihrerseits das Recht genossen, über alle Teile der philosophischen Wissenschaften, selbst über die, für welche ein ordentlicher Professor bestellt war, *privatim* zu lesen. Man versprach sich von dieser Einrichtung eine Förderung der Lehrtätigkeit, sowohl der Professoren, wie jüngeren Dozenten. Es ist dies auch wohl im allgemeinen der Fall gewesen, zu persönlichen und oft gehässigen Zwistigkeiten war aber doch ein guter Anlaß gegeben, und die Akten bewahren hierfür manche Beweisstücke auf. —

Soviel über das allgemeine Schema, an das sich Segner mit seinen Absichten anzulehnen hatte. Er begann seine Vorlesungstätigkeit, indem er für brauchbare Kompendien[2]) Sorge trug, die der Professor dem damaligen Gebrauch entsprechend bei seinem öffentlichen (und dann auch privaten) Vortrage zugrundelegte, indem er sich auf die nähere Erläuterung des bei dem Zuhörer als bekannt vorausgesetzten Stoffs beschränkte. So entstanden zunächst für seinen mathematischen Unterricht 1739 die *Elementa arithmeticae et geometriae*, ein Buch nach Art des später näher zu beschreibenden Kästnerschen Buches: „Anfangsgründe der Arithmetik und

1) Ganz selbstverständlich war es, daß jeder Professor der oberen Fakultäten privatim über der philosophischen Fakultät zugewiesene Gebiete lehren durfte. Es ist daher auch nicht auffällig, daß der Professor der Jurisprudenz Gust. Bernh. Beckmann (1720—1783) in Göttingen „bisweilen über die gemeine und höhere Mathematik Vorlesungen anstellte". Es waren dies private Vorlesungen, die mit 1—5 Louisd'or bezahlt wurden.

2) Der Passus über die Kompendien in den Statuten heißt: *Liberum esto eligere praecepta et scriptores in quos praelectionibus suis commentari velint, solide tamen et distincte pro virili parte proponantur omnia, usibusque publicis et privatis vitae humanae accommodentur.*

Geometrie." Ausführlicher und in deutscher Sprache wurden dieselben Gegenstände von SEGNER in seinen „Vorlesungen über die Rechenkunst und Geometrie zum Gebrauche derjenigen, welche sich in diesen Wissenschaften durch eigenen Fleiß üben wollen", Göttingen 1748 (698 Seiten in 4^0) behandelt. SEGNER beginnt in diesen Büchern die Trennung der reinen und praktischen Geometrie zu vollziehen, die später G. A. KÄSTNER in seinem Buche konsequent durchgeführt hat, um die Strenge der Beweise nicht zu beeinträchtigen. Für seinen physikalischen Unterricht verfaßte SEGNER erst 1746 die „Einleitung in die Naturlehre"[1] (2. Auflage 1754, 3. Auflage 1770). „Die schuldigkeit, welche mir oblieget die naturlehre öffentlich zu erklären, und den lehrbegierigen alle bequemlichkeit zu verschaffen . . . . kan mich entschuldigen wegen der Anfertigung gegenwärtiger Einleitung", heißt es bescheiden in der Vorrede. Sein Hauptbestreben ist, wahr, vollständig und gründlich zu sein, ohne viel neue Untersuchungen zu geben. Über die Teile der angewandten Mathematik, die SEGNER halbjährlich in seinen Vorlesungen traktierte, hat er kein besonderes Lehrbuch geschrieben. Auch über die Algebra resp. Analysis des Endlichen gab er erst in Halle 1756 ein Kompendium heraus, als Fortsetzung seiner *Elementa arithmeticae et geometriae,* die 1756 in Halle als *Cursus mathematicus I* neu aufgelegt wurden. In jenem Buche: *Elementa Analyseos finitorum* sind die ersten Ansätze zu der höheren Mathematik entwickelt, in denen SEGNER in Göttingen denjenigen „seine besonderen Bemühungen anbot, die sich noch weiter in den mathematischen Wissenschaften umzusehen gedachten."[2] Was SEGNER in diesem Buche zu geben versuchte, drückt er in der Vorrede so aus: *fuit autem propositum eos qui satis ab Arithmetica atque Geometria instructi sunt ad solutionem manu ducere omnium problematum quae redigi possunt ad aequationes veri nominis, quarum scilicet membra plane atque perfecte sunt aequalia.* Damit schließt er die Infinitesimalrechnung aus, von der er in den Worten: *hac enim re aequationes reliquis ab iis, quas fluxionum methodi suppeditant et calculus potissimum differentialis, ego equidem distinguo, in quibus veram aequalitatem non concipio, sed tendentiam tantum quandam ad aequalitatem*

1) Von dem Umfang des behandelten Stoffes gibt folgende Aufzählung der Kapitelüberschriften ein Bild: Von den allgemeinen Eigenschaften der Körper, von dem Gleichgewichte, von dem Gleichgewichte flüssiger Dinge, von der Luft, von der anziehenden Kraft, von dem Feuer, von dem Lichte, von Bewegungen, die von verschiedentlich wirkenden Ursachen entstehen, von den himmlischen Körpern, von den Lufterscheinungen.

2) Vgl. die Ankündigung der Vorlesung für das Wintersemester 1750/51. Ich entnehme diese Anzeigen nicht dem *Catalogus praelectionum*, der nur die Vorlesungen der Professoren angezeigt enthält, sondern den Gött. Gel. Anz., wo auch die Vorlesungen der Privatdozenten gegeben sind.

istam, quam non ante attingunt, quam ubi penitus evanescunt, quae vocantur differentialia eine Auffassung ausspricht, die der Leonh. Eulers in seinen *Institutiones calculi differentialis cum eius usu in Analysi finitorum ac doctrina serierum,* Berolini 1755 nicht unähnlich ist.

Und in der Tat scheint auch Segner viel einem andern Hauptbuche Eulers, der 1748 erschienenen *Introductio in analysin infinitorum,* einem Buch, das im 18. Jahrhundert allmählich das *standard book* für jegliches höhere mathematische Studium wurde, entnommen zu haben. Jedenfalls sagt er selber in der Vorrede: *nihil aliud egi quam ut ex libris qui ad manus sunt colligerem, quae scopo convenire videbantur, eoque in corpus aptum et undique cohaerens conjungerem.* Deutlicher spricht von sich diese Anlehnung A. G. Kästner aus: „Ich habe mich, sagt er in der Vorrede zu seinen 'Anfangsgründen der Analysis endlicher Größen', Göttingen 1759, der Schriften eines Gelehrten bedient, der mit gleicher Geschicklichkeit sich zu Anfängern herabzulassen, und die größten Meister zu lehren weiß. Weil ich hier Leser zum voraussetzen darf, die noch wenig Kenntnis von der höheren Mathematik haben, so ist mir erlaubt hinzuzusetzen, daß es Herr Euler ist." —

Was nun die Segnerschen Lehrstunden selber anbetrifft d. h. ihren näheren Charakter, so ist hierüber heute nur wenig noch festzustellen. Joh. Steph. Pütter, der über die Vorlesungen A. G. Kästners, A. F. L. Meisters usw. aus späterer Zeit einige Angaben macht, berichtet über sie nicht, und ebenso ist mir bis jetzt kein Buch bekannt geworden, das wie G. Gamauf, Erinnerungen aus Lichtenbergs Vorlesungen über Erxlebens Anfangsgründe der Naturlehre, 3 Bände, Wien und Triest 1808/12 Nachrichten aus dem Munde seiner Schüler aufbewahrt hätte. Aus den Vorlesungsverzeichnissen läßt sich nur feststellen, daß Segner im Semester gewöhnlich täglich 3 oder 4 Stunden las, von denen eine öffentlich war. In der öffentlichen Stunde las er seinem Lehrauftrage entsprechend und in seiner Eigenschaft als *professor publicus ordinarius* in einem Turnus von 4 Semestern die reine und angewandte Mathematik. In den „besonderen" Stunden trug er außer über spezielle Gebiete der Mathematik über dieselben Gegenstände mit einer bestimmten Phasenverschiebung vor.[1]) Gerade in dieser letzten Gewohnheit,

1) Es genüge hier etwa die Anzeige der Vorlesungen für das Wintersemester 1739 und Sommersemester 1750 zu geben:

a) Segner P. P. O. *math. et phys.: Publice hora III. perget in explicanda Geometria sua, eaque, quod brevi fiet, absoluta, ad Optica progredietur. Privatim eadem Elementa Arithmeticae et Geometriae docebit hora X., reliqua mathemata, Mechanicam puta, Opticam et Astronomiam, hora II. et Physicam experimentalem, hora XI.*

b) Der Herr Prof. Segner wird öffentlich um 9 erst die Algebra lehren, her-

in privaten und öffentlichen Stunden dasselbe vorzutragen, kommt am besten die schon oben berührte Entwicklung zur Geltung — die später ganz allgemein geworden ist —, in den privaten und von den Studierenden bezahlten Vorlesungen, auf deren Vorbereitung der Professor daher auch die meiste Mühe verwandte, den jeweilig zu erledigenden Lehrstoff vorzutragen. So las z. B. später A. G. KÄSTNER seine Vorlesung über reine und angewandte Mathematik stets privatim, dagegen ein Kolleg: die Encyklopädie der Mathematik und Physik wöchentlich in 2 Stunden öffentlich. Aber wie weit nun SEGNER seine angekündigten Vorlesungen tatsächlich zustande brachte und wie stark sie besucht wurden, ist eine schwieriger zu beantwortende Frage.[1]) Aus verschiedenen Anzeichen scheint man schließen zu dürfen, daß SEGNER die Fähigkeiten und auch den guten Willen der Hörer zu hoch eingeschätzt hat. Jedenfalls erhob sich z. B. ein Tumult in seinen Vorlesungen, als er freimütig in seinem Kolleg auf einige Fehler in CHR. VON WOLFS physikalischen und mathematischen Schriften hinwies und so, wie es bei STRODTMANN heißt, bei WOLF „Spuren der Menschlichkeit“ aufdeckte.[2]) Allerdings war der Ton, in dem SEGNER oft von den Fähigkeiten der Deutschen sprach, nicht geeignet, ihm die Zuhörer besonders geneigt zu machen.[3]) Und so wird man dem Bericht, der über SEGNERS späteres Abschiedsgesuch unter dem 19. Nov. 1754 an den König gerichtet wurde, Glauben schenken müssen.[4]) Es heißt dort über die Vorlesungen: „Sein (SEGNERS) fortgang bringt keinen sonderlichen Nachteil, in maßen jetzo solche Männer vorhanden sind, welche in Gründlichkeit mehrerwähnten *pro-*

---

nach die logarithmische Rechenkunst, und die flache und sphärische Trigonometrie und endlich die Feldmesserey, wenn die vorbenannten Wissenschaften die Zeit nicht alle einnehmen. Seine besonderen Stunden sind um 10 über die Rechenkunst und Geometrie, und um 2 über die Experimentalphysik.

1) Hier mag angemerkt sein, daß es seine Schwierigkeit hat, festzustellen, welche Zuhörer ein Professor jeweils gehabt hat. Solange die Vorlesungen öffentlich waren, ist dies überhaupt nicht möglich, für die privaten nur dann, wenn zufällig die Listen vorhanden sind, die ein Professor über seine Zuhörer führte. Die Einrichtung, daß auf der Quästur das Kolleggeld bezahlt wurde und damit aktenmäßige Belege erhalten sind, ist erst späteren Datums, in Göttingen ca. 1840.

2) Der Streit hierüber auch mit seinen Kollegen, wurde später in die Öffentlichkeit getragen und hat zu mehreren Schriften SEGNERS und auch der Gegner Anlaß gegeben. Die erste Schrift SEGNERS hierüber stammt aus dem Jahre 1741: *Invitatio ad lectiones philosophicas naturales experimentales publicas.*

3) „Hr. SEGNER hat die *mode* alle Deutsche vor dumme jungens zu schelten, besonders den Hrn. WOLF“ heißt es in einem Brief JOH. LUD. UHLS an VON MÜNCHHAUSEN über das akademische Leben in Göttingen (zitiert nach E. F. ROESSLER, Die Gründung der Universität Göttingen, Göttingen 1855, p. 387).

4) „Personalakte SEGNER“ im Archiv des Kuratoriums.

fessori gleich kommen, in der Deutlichkeit und Leichtigkeit des Vortrages übertroffen haben, daß der letzte seine angeschlagenen *Collegia* bisweilen gar nicht hat zu Stande bringen können".

Jedoch wird Segner, ebenso wie Tob. Mayer (1723—1762), der später in der gleichen Lage war, der Mißerfolg mit seinen Vorlesungen weniger geschmerzt haben, als daß er sich mit seinen Kollegen nicht in das rechte Einvernehmen setzen konnte. Hierüber hat A. G. Kästner Segners Urteil aufbewahrt. Auf die Frage des ersteren, wie er sich in Göttingen zu verhalten habe, antwortete ihm Segner: „Sie müssen gerade das Gegentheil von dem thun, was ich gethan habe. Ich habe wollen für das gemeine Beste arbeiten und das soll man in Göttingen nicht."[1])

Man geht wohl nicht fehl, wenn man diese Äußerung auf Segners Erfahrungen aus den letzten Jahren seiner Göttinger Zeit bezieht. Um auf sie vorzubereiten, müssen wir zuvor das Bild von Segners Tätigkeit in Göttingen nach zwei Seiten vervollständigen. —

Zunächst etwas über die wissenschaftliche Tätigkeit. Joh. Steph. Pütter sagt: Bey academischen Lehrern ist es ein Theil ihres Berufs, wenn sie zum Behuf ihrer Vorlesungen, oder auch sonsten nützliche Schriften herausgeben, die alsdann nicht nur von eines jeden Geschicklichkeit und Fleiße die besten Proben enthalten, sondern zugleich zur Anzeige dienen, welchem Teile der Gelehrsamkeit sich ein jeder vorzüglich widme." Zu diesem „sonsten" hat Segner oft Gelegenheit gefunden.

Schon oben wurde gelegentlich erwähnt, daß Segner auch der medizinischen Fakultät angehörte.[2]) Das hier oft zu führende Dekanat gab ihm nun reichlich Gelegenheit als Promotor in kurzen Programmen über seine mannigfachen Untersuchungen zu berichten. Übergehen wir die Schriften medizinischen Inhalts ganz, so mögen etwa folgende mathematisch-physikalische genannt sein: *Programma I und II de fonte Pliniano* 1737; *Dissertatio de caussa Redekeriana* 1738; *Programma de aequandis thermometris aëreis* 1740; *Programma de libra, qua sui quisque corporis pondus explorare possit* 1741; *Programma de barometro navali* 1743; *De locando centro quietis librarum* 1744 usw. Besonders interessant sind 7 Abhandlungen hydraulischen Inhalts, die 1747 in einem Sammelband: *Fasciculus exercitationum hydrauli-*

---

1) Brief an den Professor Joh. Eph. Scheibel in Breslau, vom 19. April 1797 (Cod. MS. philos. 166[a] der Göttinger Universitätsbibliothek).

2) Segner hat aber nie eigentliche medizinische Kollegs gelesen und von der Praxis hatte er sich in Göttingen ganz zurückgezogen. Er las regelmäßig eigentlich nur über die Chemie z. B. 1739 kündigt er an: *Demonstrationes Chemicas absolvet, deinde iis lectionibus medicis, quas maxime desideraverint, nobilissimorum commilitonum studia, inserviet.*

carum zusammengefaßt erschienen. Sie enthalten die Vorstudien zu Segners späteren Arbeiten auf dem Gebiete der Hydrostatik und Kapillarität. Er selbst sagt von ihnen: *Novi parum continent; verum potissimum in illustrandis digerendisque iis versantur, quae a viris reperta sunt, non uno loco laudatis.* Diese Lehrmeister sind Bernoullius *pater*[1]) *et filius patre dignus*[2]). Erst mit dem Programm: *de natura fluidorum quaedam theoremata* 1750 beginnen Segners bedeutendste Leistungen aus dem Gebiete der Hydrostatik und Kapillarität. In der genannten Arbeit entwickelt er seine Vorstellungen über die Wirkungsweise der einzelnen Wasserteilchen aufeinander. Er schreibt jedem Teilchen eine Wirkungssphäre zu, von der er sagt, daß sie kleiner als eines Haares Breite sei. Auf Grund dieser Vorstellungen führt er sodann den Begriff der Oberflächenspannung ein, von dem er besondere Anwendungen macht in seiner Arbeit: *de figuris superficierum fluidarum,* 1751, in der er die Oberflächen flüssiger Körper studiert und von hier aus Betrachtungen über die Form der Meeresoberfläche anstellt.

Es kann nicht die Absicht sein, hier diese und die weiteren Arbeiten Segners näher zu charakterisieren. Sie sind eines besonderen Studiums wert, vorzüglich um zu sehen, in welcher Beziehung Segners Arbeiten zu denen von Clairaut und den späteren von C. Fr. Gauss, *Principia generalia figurae fluidorum in statu aequilibrii,* Commentationes rec. soc. reg. Gott. 7 (1829) stehen. Übrigens sind die zuletztgenannten beiden Abhandlungen Segners Vorlesungen, die er als erstes Mitglied der mathematischen Klasse der kgl. Sozietät der Wissenschaften[3]) in den Jahren 1751/53 gehalten hat. Sie finden sich daher auch in den ersten Bänden der *Commentarii soc. reg. scientiarum Gottingensis* gedruckt, wodurch sie dem mathematischen Publikum leichter zugänglich wurden, als die vielen zerstreut erschienenen Programme,

---

1) Joh. I Bernoulli, *Opera omnia,* Genovae et Lausannae 1743 (*ed.* G. Cramer), tom. 4.

2) Dan. I Bernoulli, *Hydrodynamica sive de viribus et motibus fluidorum commentarii,* Argent. 1738.

3) Segner stellte auch die erste math.-phys. Preisfrage der Societät aus dem Gebiete der Hydrodynamik: *Modorum, qui hactenus reperti sunt, machinas per fluida in gyrum agendi, si non omnes, praecipuas tamen enumerare; effectus, actione fluidi apud eorum quemlibet productos, ostendere, experimento confirmare; qui modus reliquis praeferendus sit, quovis respectu colligere; atque in his omnibus non eorum tantum, quae essentialia sunt machinis, sed illorum quoque, quae extrinsecus incidunt, nulla arte separanda, rationem habere.* Den Preis erhielt der Sohn L. Eulers: Joh. Albrecht Euler mit der Schrift: *Enodatio quaestionis: quomodo vis aquae aliusve fluidi, cum maximo lucro, ad moles circumagendas, aliave opera perficienda impendi possit,* Gottingae 1756.

Übrigens wurden die Preisfragen der Societät in der Folgezeit sehr wenig preisgekrönt, erst die neunte Arbeit erhielt 1779 wieder einen Preis.

von denen man gewöhnlich nur durch die gelehrten Zeitungen Nachricht erhielt. Eine dritte Abhandlung Segners zur Hydrostatik: *Lectio circa eas fluidorum superficies, quae in vasis stagnant amplissimis,* ist nie publiziert worden.[1]) —

Diese fruchtbare schriftstellerische Tätigkeit[2]) trug nun Segner im In- und Auslande bald eine geachtete Stellung ein: er wurde u. a. im Laufe der Zeit zum Mitglied der Berliner und Londoner Akademie ernannt. Auch in Hannover erkannte man seine Verdienste. Noch in dem schon angezogenen Berichte an den König heißt es: „Wir können nicht in Abrede stellen, daß gedachter Professor Segner, ob er wohl von der Arzney-Kunst kein sonderlich Werk gemacht, dennoch außer seiner guten Wissenschaft in der *Physic* einer der stärksten jetzo in Teutschland lebenden *Mathematum*, sonderlich in *Mathesi pura* sey und dießfalls in- und außerhalb Teutschlands in großem Ruhm stehe.“ So konnte denn Segner erwarten, daß, als durch Weggang Albrecht von Hallers (1708—1777) nach Bern die Präsidentenstelle in der Sozietät der Wissenschaften frei wurde, diese ihm angeboten wurde. Es scheinen aber von Haller, mit dem Segner „gar nicht gut Freund war“ Sam. Chr. Hollmann[3]) auch dahingehende Versprechungen gemacht worden zu sein: vor allem aber suchte auch der bisherige Sekretär Joh. Dav. Michaelis (1717—1791) eine einflußreiche Stellung zu erhalten. Es kam hier-

---

1) Sie befindet sich im Nachlaß von Joh. Dav. Michaelis auf der Göttinger Universitätsbibliothek: Cod. MS Mich. 88, Bl. 131 ff.

2) Es mag hier auch bemerkt werden, daß Segner stets bestrebt war, seine theoretischen Kenntnisse praktisch zu verwerten. Sein Reaktionswasserrad, mit dem bei Nörten eine Ölmühle getrieben wurde, ist bekannt (vgl. Hannov. Anzeigen für 1753, Nr. 70). Er konstruierte aber auch eine Studierlampe für die Studierenden, vgl. *Programma de Lucerna,* Gottingae 1743 und „erfand ein Werkzeug, vermittelst dessen die gemeinen und trigonomischen Rechnungen sehr bequem können verrichtet werden“, vgl. *Usus scalarum logisticarum,* Gottingae 1749.

3) Über Sam. Chr. Hollmann, wegen seiner meteorologischen Beobachtungen in Göttingen und einer Geschichte der Universität Göttingen: „Die Georg-Augustus-Universität zu Göttingen in der Wiege, in ihrer blühenden Jugend und reiferem Alter; mit unpartheyischer Feder entworfen von einem ihrer ersten und nun allein noch übrigen academischen Lehrer“, Göttingen 1787 bekannt, fällt E. Riecke, Geschichte der Physik in Göttingen, in F. Klein und E. Riecke, Über angewandte Mathematik und Physik an den höheren Schulen, Leipzig 1900, p. 5 das Urteil: „Wissenschaftlich durchaus unbedeutend“. A. G. Kästner drückt es so aus: „Gegen die Furcht vor Abnahme der Gemüthskräfte im Alter habe ich mich durch Hollmanns Exempel verwöhnt. Was der in seinem 80. Jahr schrieb, war nicht viel dummer, als was er 30 Jahre zuvor geschrieben hat. Er hatte seinen Verstand also ziemlich ungeschwächt erhalten“, Dreißig Briefe und mehrere Sinngedichte von A. G. Kästner, herausg. von Amalie v. Gehren, geb. Baldinger, Darmstadt 1810 (Brief vom 15. Febr. 1789).

über zu unangenehmen Zwistigkeiten, deren Folge der Austritt SEGNERS aus der Sozietät war.

Bestärkt wurde SEGNER, wie es scheint, in diesem seinen Entschluß durch die zweite Erfahrung, die sich an seine organisatorische Tätigkeit knüpft. Der bewegliche Kopf SEGNERS hatte schon lange erkannt, daß zu einem gedeihlichen Fortschritt der Mathematik und Physik in Göttingen ein Zweig der mathematischen Wissenschaften eine besondere Ausbildung bedurfte, der im 18. Jahrhundert eine stets wachsende Bedeutung gewann. Es war dies die Astronomie, die besonders von Frankreich und England aus eine große Förderung erhielt, vorzüglich durch das letztere, das wegen seiner nautischen Interessen hier besonders tätig war. So betrieb denn auch SEGNER seit langem (seit ca. 1748) mit großer Energie den Bau eines Observatoriums. Tatsächlich gelang es mit Unterstützung der grubenhagen-calenbergischen Landschaft von 1751 an auf einem der Stadttürme ein Observatorium einzurichten, dessen vollkommene Ausrüstung, wie sie im Plane vorgesehen war, aber bis 1754 dauerte. Diesem Unternehmen widmete nun SEGNER in den letzten sechs Jahren seines Göttinger Aufenthalts einen großen Teil seiner Zeit.[1]) Einen Einblick in diese Tätigkeit gewinnt man durch die Akten des Kuratoriums betr. „die Anlegung und fernere Unterhaltung des *Observatorii*“, die auch Stoff genug zu einer Gründungsgeschichte der Göttinger Sternwarte bieten. Hier interessiert nur, daß im Jahre 1750 als Nachfolger des Lehrers der praktischen Mathematik JOH. FRIEDR. PENTHER (1693—1749) TOB. MAYER nach Göttingen berufen wurde: „Unsere vornehmste Absicht ist, daß Ihr nicht nur alle practischen Theile der Mathematik gründlich lehret, sondern auch denen *Studiosis* wirkliche Handleitung gebet“, heißt es in dem Schreiben an MAYER vom 26. Nov. 1750.[2]) Es befremdet, MAYER als Professor der Haushaltungswissenschaft (Ökonomie) in Göttingen angestellt zu sehen. Und in der Tat liegt der Grund zu dieser Berufung tiefer. Einer der Berater VON MÜNCHHAUSENS war der Hofrat CHR. LUDWIG SCHEIDT, 1709 im Hohenloheschen geboren, 1738 *prof. extraord. iuris* in Göttingen, seit 1748 Hofrat und Bibliothekar zu Hannover. An diesen hatte sich sein Landsmann JOH. MICH. FRANZ, der Direktor der HOMANNschen Landkartenoffizin in Nürnberg und Gründer der kosmographischen Gesellschaft daselbst, gewandt, mit der Bitte, beim Minister seinem Unternehmen, einer Herausgabe von Erd- und Himmelsgloben, in Göttingen eine Heimstätte zu erwirken.[3]) Das beste

---

1) Aus dieser Zeit stammen auch einige astronomische Abhandlungen SEGNERS, z. B. *Commentatio de extendendo campo micrometri* und *de parallaxi reticuli astronomici* in den *Commentarii soc. reg. scient.* Gott. 1751 u. 1752.

2) „Personalakte TOB. MAYER“ im Archiv des Kuratoriums.

3) Hierüber ein ausgedehntes Aktenmaterial im Kuratorialarchiv.

Mittel, den Minister zu interessieren, schien, die Mitglieder der kosmographischen Gesellschaft allmählich nach Göttingen zu ziehen. Der erste war nun Tob. Mayer, der bereitwillig kam, weil ihm vielleicht von Scheidt Aussicht auf die Sternwartendirektion gemacht worden ist. Jedenfalls schreibt von Münchhausen unterm 9. Dez. 1750 an Scheidt: „Hiernächst kan der H. Professor (Mayer) sich versichert halten, daß sobald es zum Bau des *Observatorii astronomici* kommen wird, seine rathsamen Gedanken, wovon man sich viel Gutes *promittirt,* vorhero unfehlbar sollen ausgebethen werden.“ Auch Segner stimmte der gemeinsamen Arbeit bei: „Ich halte diesen Mann (Mayer) in der That vor sehr geschickt und stelle es mir als ein wahres Vergnügen vor in seiner Gesellschaft an einem so wichtigen Werke zu arbeiten.“ [1])

In der Tat leiteten beide bis zu einer gewissen Zeit den Bau des Observatoriums gemeinsam, bis sich Mayer, irgendwie von Segner verletzt fühlend, zurückzog und nun nur der Ausarbeitung seiner theoretischen Arbeiten lebte, die sämtlich in den ersten Bänden der Kommentarien der Gesellschaft der Wissenschaften erschienen und die rasch seinen Ruhm als eines der ersten Astronomen seiner Zeit begründen halfen. Im Jahre 1754 bekam Tob. Mayer von Moreau de Maupertuis bezw. Leonh. Euler einen Ruf an die Berliner Akademie. [2]) Mayer schlug ihn aus: er fühle sich in Göttingen zufrieden. Der Ruf wird vorteilhafter wiederholt, und Mayer ist nicht abgeneigt zu gehen. Ihn reizt es, mit Euler, Maupertuis usw. in persönlichen Verkehr treten zu können; besonders aber die Aussicht, keine Vorlesungen halten zu brauchen. [3]) Er berichtet wegen seiner Berufung nach Hannover, und nun beginnt das Spiel der Kräfte, das endlich die Ausschaltung Segners zur Folge hatte. Mayer stellt die Bedingung, die Direktion der Sternwarte allein zu erhalten: ein Mitdirektor könne die Uhren verstellen und so jede Beobachtung unmöglich machen, Michaelis aber bestärkt die Regierung alles zu tun, um Mayer zu halten, wenn es auch eine

---

1) Brief vom 7. März 1751 in den Akten des Kuratoriums, Akte betr. „die Anlegung und fernere Unterhaltung des *Observatorii.*“

2) Über den Ruf Mayers nach Berlin unterrichten außer Cod. MS. philos. 157 und 159 der Göttinger Universitätsbibliothek die Akten des Kuratoriums: „Personalakte Tob. Mayer“ und „Akte betr. Anlegung und fernere Unterhaltung des *Observatorii.*“

3) „Mayer scheint in Berlin am meisten zu gefallen, daß er Collegia lesen kann, und doch nicht schuldig ist, sie zu lesen, sondern seiner Hauptarbeit nach ein *Academicien,* ferner daß er über das dortige Observatorium völlig zu disponieren hat. Er meint auch die Mathesis sey dort besonders hoch geachtet,“ schreibt Michaelis an von Münchhausen unterm 1. Sept. 1754 („Personalakte Tob. Mayer“).

Disgrace gegen Segner koste.[1]) Aber Münchhausen erkennt die Undankbarkeit, die man gegen diesen begeht, wenn man ihm die Direktion der Sternwarte nimmt, und sucht daher Mayer durch Erhöhung des Gehaltes zu befriedigen. Jedoch Mayer will sich auf keine weiteren Verhandlungen einlassen: an Euler schreibt er, er habe die Forderungen so hoch gestellt, daß man ihn sicher ziehen lassen werde. Aber dies war ein Irrtum. Unterm 19. Sept. 1754 wird an Segner wegen Abtretung des Observatoriums geschrieben: das Dekanat der medizinischen Fakultät und andere Dinge hätten ihn an der raschen Betreibung des Sternwartenbaues gehindert, man sei überzeugt, daß er dem *Publico* mit andern Dingen mehr dienen könne und zudem (so wird jetzt die Sache aufgefaßt): „ist der H. Prof. Mayer behufs der Astronomie angenommen und dies nebst der Geographie sein Ergon". Segner sendet schon unterm 28. Sept. 1754 seine Schlüssel nach Hannover mit der Bemerkung: „Was Ew. Hochwohlgeboren in Ihro Excellence des Herrn Cam. Pr. hohen Namen befehlen, ist meine Schuldigkeit unterthänigst zu besorgen." Übrigens sei die Auseinandersetzung mit Mayer *amicabiliter* erfolgt: „Denn ich habe wider H. Prof. Mayer nichts. Vielmehr habe ich ihn seit seiner Ankunft bis hieher mehr gefälligkeiten erwiesen, als er selbst weis", setzt er in dem genannten Brief hinzu. Sein Antagonist, den er haßte, war vielmehr Michaelis, wie dies z. B. aus einem Schreiben

1) „An dem Manne (Mayer) ist der Societät sehr gelegen: überhaupt aber glaube ich auch, daß die Universität jemahls seinesgleichen wiederbekommt, wenn sie ihn einmahl verloren hat. Er ist ein wahrer *Mathematicus* und kein bloßer *Empiricus* wie der sel. Penther, der nur im kleinen brauchbare Leute zog, und nicht im großen; dabei weiß er seine Sachen brauchbarer zu machen als Segner, dem es sonst an blofs spekulativischer *Mathesi* nicht fehlet: und hat eine Gabe, sich schriftlich, sonderlich im Lateinischen, so auszudrücken, und so begreiflich und in der That zierlich zu schreiben, als ich von keinem jetzigen *Mathematico* weifs. Wird seine Entdeckung der *longitudines* (Bestimmung der Meereslänge) in England approbiert, so würde der Verlust der Ehre unerträglich seyn, wenn unsere Universität ihn verlöre", wieder Michaelis in dem schon genannten Brief an von Münchhausen. Damit vergleiche man, was er von Segner u. a. sagt, als dieser, weil es ihm untersagt wurde, gegen Hollmanns Vorlesung in der Societät etwas zu erinnern, im Affekte geäußert: er wolle nächstens eine Ausarbeitung machen, die voller mathematischer Fehler sey: man werde es nicht merken und drucken lassen; alsdann werde er sich öffentlich moquieren: „Wer *capable* ist um eines eintzigen Feindes willen an einer gantzen Societät eine solche Rache sich vorzunehmen, die nicht einmal anders zu Recht werden kann, als wenn er sie und seine Bosheit, öffentlich bekennt, der ist auch capable die Uhr des Observatoriums zu verrücken, und bei dem kann H. Mayer nicht sicher seyn". Brief an von Münchhausen vom 16. Sept. 1754 in „Akte betr. Anlegung und fernere Unterhaltung des *Observatorii*".

von Chr. L. Scheidt an Michaelis: hervorgeht:[1]) „Herr Professor Mayer wird nunmehr Ursache finden Ewr. Hochwohlgeboren Freundtschaft gegen ihn zu erkennen, um so eher, als auch der Herr Prof. Segner und seine Freunde hier überall *publice* sagen, daß durch dero sehr genaue Verbindung mit Herrn Mayer seine Resolution Göttingen zu quittieren veranlaßt worden sey.“ Vom 5. Nov. 1754 ist die Bestallungsurkunde Segners als Professor der Mathematik in Halle datiert. In den Akten des Kuratoriums der Universität Göttingen befindet sich folgende Kopie:[2])

„Von Gottes gnaden Friderich König in Preußen Marggraf zu Brandenburg des Heil. Röm. Reiches Ertz Kämmerer u. Churfürst u. s. w.

Unsern gnädigen Gruß zuvor Hochgelahrter Lieber Besonderer. Nachdem wir allergdst gut und nothwendig gefunden die auf unserer Universitaet zu Halle durch absterben des Geheimden Raths von Wolff noch zur Zeit vacante Profession der *Mathematic* und *Physic* mit einem recht soliden und bey der gelehrten Welt in *reputation* stehenden *Subjecto* zu ersetzen, auch dabey Unser Augenmerk auf Euch besonders gerichtet, und beschlossen haben, Euch wenn Ihr dazu resolviren könnet

1⁰ Einen jährlichen Gehalt von 1200 ℛ nebst gewöhnl. Emolumenten

2⁰ zum Transport Eurer *famille* und effecten an Reyse-Gelde 500 ℛ mit freier *entrée* von der Accise zu Halle zufließen zu lassen, nicht minder

3⁰ Euch den Caracter als geheimter Rath ohne Erlegung derer sonstigen üblichen Chargen: Cassen Gelder beyzulegen, und Euch ein besonderen *rang* bey der Universitaet zu bestätigen, jedoch mit der Bedingung, daß denen übrigen Professoren keine gegründete Uhrsache gegeben werde, sich darüber zu beschweren, auch

4⁰ wann Ihr es begehret, den Adel, welchen Eure *famille* vor Zeiten in Ungarn bereits dem vernehmen nach erhalten, zu renouvelliren, und das erforderlich *Diploma* ohne daß die in dergl. fällen zu unsern Caßen zu erlegende *jura* dafür gefordert werden sollen, Euch ausfertigen laßen. Als werdet Ihr euch erklären.

Berlin 5. Nov. 1754

Auf S. Königl. Majestät
allerg. special-Befehl
Bismark. Dankelmann.“ —

So verlor Göttingen einen Lehrer, dessen Namen neben denen von Albr. von Haller und Joh. Matth. Gesner der hervorragendste aus dieser

---

1) Brief vom 9. Jan. 1755 in Cod. MS. philos. 157 der Göttinger Universitätsbibliothek.

2) „Personalakte Joh. Andr. Segner“.

ersten Periode der Göttinger Universität ist. Segner war in erster Linie ein schöpferischer Geist, der sich den Bernoullis, P. Varignon und A. Cl. Clairaut unter den Mathematikern, Peter Musschenbroek (1692—1761), Bernh. Niewentwyt (1634—1718) und W. Jac. s'Gravesande (1688—1742) unter den Physikern verwandt fühlte; er war mehr Akademiker als Professor und traf daher er für sein Verhalten auch nicht ganz den Ton der Universität. Was man von seinen Wissenschaften, die er vertrat, erwartete, war, daß sie die Studierenden heranbildeten. Er wollte mehr geben und fand hier Widerspruch. Denn Mathematik und Physik hatten noch nicht in dem Sinne mit der Philosophie gebrochen, daß sie auf der Universität Selbstzweck geworden waren. Die Herausbildung eines Zustandes, wo die Mathematik eine selbständige Bedeutung als Unterrichtsstoff erhielt, wird in Göttingen einem andern Manne verdankt, der mit einem feinem Verständnis für die immer weiter gehende Entwicklung der Mathematik auch ein Gefühl für die Bedürfnisse des Hochschulunterrichts verband: der es verstand, die Mathematik von Newton, Leibnitz, Bernoulli und Euler in angemessener Form auf der Universität zu popularisieren. Die Darlegung dieser Gedankengänge aber gehört ins folgende Kapitel. —

Hier müssen nur noch kurz einige Betrachtungen um den Vertreter der angewandten Mathematik aus dieser ersten Zeit gruppiert werden. Es wurde schon oben gesagt, daß Segner in seinen Kursusvorlesungen auch über angewandte Mathematik las. Dies konnte aber nicht mehr als eine erste Orientierung sein, und es war daher, wollte man die Studierenden bis zur tatsächlichen Beherrschung der *Mathesis applicata* führen, durchaus ein Professor nötig, der die praktischen Teile der Mathematik nicht nur las, sondern aus eigener Erfahrung kannte. Die Idee besonderer Fachschulen war in damaliger Zeit hierfür noch nicht gegeben; sie konnte auch wohl kaum entstehen in einer Zeit, wo die Praktiker sich mit der einfachsten Angabe der Operationsregeln begnügten, ohne den Wunsch nach theoretischer Einsicht auch nur in dem bescheidensten Maße zu besitzen. Einen solchen praktischen Mann fand von Münchhausen in Joh. Fried. Penther.

Geboren am 17. Mai 1693 zu Fürstenwalde, studierte Penther[1]) seit 1713 zu Frankfurt an der Oder, *in eaque Academia magni* Coccеii *et* Jaegeri *praelectiones juridicas, Mathematicas autem* Hermanni, L. C. Sturmii, *iuniorisque* Johrenii *Physicas frequentavit, sed etiam,* Hermanno *eodem annuente, iuvenes aliquot generosos, qua ipse pollebat, operosae matheseos facultate instruxit;*

1) Über Penther vgl. J. St. Pütter, Gelehrtengeschichte 1, p. 66, wo auch Angabe seiner Schriften, und *Acad. Georg. Aug. programma in memoriam* Jo. Fried. Pentheri, verfaßt von Joh. Matth. Gesner, Göttingen 1749, aus dem die Citate entnommen sind.

hierauf ging er als Hofmeister eines Grafen von Haugwitz auf die Ritterakademie nach Liegnitz, trat 1720 in Stolbergsche Dienste zunächst als Bergsekretär, seit 1730 als Bergrat, nachdem er zuvor 1728 auf einer Reise nach Ungarn insbesondere seine bergmännischen Kenntnisse erweitert hatte. von Münchhausen berief ihn 1736 nach Göttingen, zunächst nicht als Professor, sondern als Oberbauinspektor der akademischen Gebäude mit dem Titel eines kurhannöverischen Rates.

In einem Bericht vom 6. Aug. 1736 an den König heißt es über Penther[1]): „Als er nun seine Wissenschaft und Erfahrenheit in der *Mathesi* insonderheit in der *civil-* und *militair*-Baukunst und den praktischen Theilen der Mathematic durch herausgelassene Schriften als durch Zeugnisse des Herrn von Stolberg und anderer hinlängst erwiesen hat, und der Universität mit einem solchen Manne sehr gedient seyn wird, der in ermeldeten praktischen Theilen der *matheseos* eine genauere Anleitung geben kann, als dem ordentl. *Professori Mathematum* mitzutheilen möglich ist, indem es diesem an der Zeit, die zu einer Anweisung im Reiſsen erfordert wird, ermangelt, so . . .“ Und in der Tat hatte Penther gleich in seinem ersten Kolleg eine Anzahl Schüler vereinigt, die bei ihm praktische Geometrie (d. h. also Feldmessen) lernen wollten.[2]) Diese Zahl steigerte sich im Laufe der Zeit immer mehr. 1743 (9. Dez.) heißt es in einem seiner Briefe an von Münchhausen[3]), in dem er um Aufbesserung seiner Lage, insbesondere aber Aufnahme in die Fakultät bittet (ordentl. Professor war er schon 1737 geworden): „massen viel *Subjecta* vorhanden, die durch meine Collegia dahin gediehen, daſs sie entweder dem hiesigen Lande wirklich Nutzen stiften, oder auswärtig ihre Dienste leisten und sich zugleich durch Bedienung glücklich gemacht haben“, und er setzt hinzu: „ich will mich ganz dagegen zum Dienst und Nutzen hiesiger Universität aufopfern und das Joch darin auch jetzo des Tages 6 Stunden lang ziehe mit Freuden tragen“.[4]) Dafür ist ihm denn auch die Liebe seiner Zuhörer nicht ver-

---

1) „Personalakte Penther“ des Kuratorialarchivs.

2) Am 10. Dez. 1736 berichtet Penther, daß er mit einigen „Scholaren den Bauplatz im *horto medico geometrice* aufgenommen habe“. („Personalakte Penther“ im Kuratorialarchiv).

3) „Personalakte Penther“ des Kuratorialarchivs.

4) Eine Vorlesungsankündigung (Winter 1739) lautet z. B.: Jo. Fr. Penther, *P. P. O. oec. publice Arithmeticam ad res oeconomicas accommodatam hora IV. tradet; privatim hora III. cursum rerum mathematicarum practicarum ex Geometria, Mechanica, Architectura tam civili, quam militari, Pyrobolia, Gnomonica et Optica in usum eorum, qui vel exteras terras visitare gestiunt, vel domi in usilissimis dictis rebus peregrini esse nolunt, multum temporis in singulas nominatas matheseos partes impendere haud studentes, instituet selectiores in qualibet parte auctores secuturus.*

sagt geblieben. Aus den *vitae curriculis* einiger Kandidaten, wie sie in den Akten noch aufbewahrt werden, leuchtet dies deutlich hervor. Z. B. heißt es bei einem seiner Nachfolger im Amte Al. Ludw. Friedr. Meister:[1]) *Adpinxi me illis, quibus vir beatus nunc* Pentherus *tum verbis, manibus et pedibus in eo, quod quaerebam studiorum genere praeibat; et assiduum non modo illi me esse auditorem sed et strenuum comitem neque inelegantem imitatorem cum voluptate memini* und in Gesners Programm über sein Amt: *Hoc ab autumno inde anni XXXVI ut summo ingenio atque diligentia, ita successu quoque felici nos egit, cum auditorium ipsius nunquam vacuum esset iuvenibus, qui vel audire praecipientem vellent, vel ipsis artis operibus manus a tam bono magistro dirigendas adhibere.*

Neben dieser ausgedehnten Vorlesungstätigkeit fand Penther auch Zeit einige Schriften zu publizieren, die zum Teil sehr geschätzt waren. 1738 besorgte er die Neuausgabe seiner *Praxis Geometriae*[2]), die zum erstenmal 1732 und zum 9. Male 1788 erschien und lange das maßgebende Kompendium für den Unterricht in der praktischen Geometrie blieb. Man darf in dem Buche keine theoretischen Spekulationen und Demonstrationen suchen, es ist eine praktische Anleitung zur Ausübung der Feldmeßkunst. Daneben stehen die Arbeiten über Architektur, 1738 sein *Collegium architectonicum*, von 1744 bis 1749 4 Teile seiner „Ausführlichen Einleitung zur bürgerlichen Baukunst". Daß in die Jahre 1740—1743 bezw. 1744 keine Publikationen fallen, entschuldigt er gelegentlich einmal damit, daß ihn praktische Aufgaben und Gutachten, zu denen er von Hannover aus oft gebraucht wurde, an der Schriftstellerei gehindert hatten.[3])

Am 17. Sept. 1749 starb Penther. *Amisimus Collegam, de nobis omnibusque de Academia, et juventute Academica, insigniter promeritum, cuius-*

In gratiam eorum, qui ex professo aut Mechanicae aut Architecturae civili aut militari operam dare cupiunt, totam unicuique harum materiarum dicabit horam, et quidem octavam Mechanicae, nonam Architecturae civili, decimam Architecturae militari.

1) Akte der philosophischen Fakultät, fasc. 33 (1753).

2) Der vollkommene Titel ist: „*Praxis geometriae,* worinnen nicht nur alle bey dem Feld-Messen vorkommende Fälle, mit Stäben, dem *Astrolabio*, der *Boussole* und der *Mensul,* in Ausmessung eintzeler *Linien,* Flächen und gantzer *Revier*, welche wenn deren etliche angräntzende zusammen genommen, eine Land-Carte ausmachen, auf ebenen Boden und Gebürgen, wie auch die Abnehmung derer Höhen und Wasser-Fälle, nebst beygefügten practischen Hand-Griffen, deutlich erörtert, sondern auch eine gute Ausarbeitung der kleinsten Risse bis zum grösten mit ihren Neben-Zierathen treulich *communici*ret werden von Joh. Friedr. Penther".

3) So wurden Penther z. B. 1746 die Grundrisse des Landständehauses in Hannover und des Zuchthauses in Celle zur Begutachtung zugeschickt (Akten des Kuratorialarchivs).

que memoriae, quam ipsa eiusque scripta egregia immortalem reddunt, dicatum etiam est programma[1] .. *ab* .. *Dn.* Gesnero *conscriptum,* trägt Hollmann als Dekan in den *Liber actorum Decanalium*, p. 51 ein. —

Nachfolger Penthers wurde Tob. Mayer. Aber doch nur zum Teil. Wohl kündigte er Vorlesungen über angewandte Mathematik an, z. B. im Wintersemester 1752/53: „Über Verfertigung, Einrichtung und Nutzen der Maschinen, über Civilbaukunst"; im Sommersemester 1760 las er „über die praktische Feldmeßkunst um 5, über die mathematische Geographie und Hydrographie um 2 öffentlich und über die Kriegsbaukunst und Pyrotechnic um 10." Aber wie weit er sie tatsächlich gehalten hat, bleibe unentschieden. Jedenfalls stand ihm seit 1750 Joh. Michael Müller (1723—1777) zur Seite, der zum Aufseher über die Gebäude im Fürstentum Göttingen bestellt wurde und 1751 die Erlaubnis erhielt, öffentliche Vorlesungen zu halten. Er wurde 1753 Magister und las dann später halbjährlich über die bürgerliche und Kriegsbaukunst und gab Anleitung zur ausübenden Meßkunst (alle Sommer), wie auch gelegentlich zur reinen und angewandten Mathematik „nach ihren einzelnen Teilen".[2])

Besonders aber war seit 1754 als Lehrer der „Weltweisheit und praktischen mathematischen Wissenschaften" ein anderes Mitglied der kosmographischen Gesellschaft Tobias Mayers Schwager Georg Moritz Lowitz (1722—1774) berufen worden und damit nun auch äußerlich zum Ausdruck gebracht, daß man Mayers Zeit so wenig wie möglich mit ohnehin ihm lästigen Vorlesungen belastet wissen wollte. Es würde hier zu weit führen, die ganze Geschichte des verunglückten Unternehmens der Verpflanzung der

---

1) Aus dem Programm stehe noch folgende Stelle hier, die zeigt, wie außerordentlich die Neuerung empfunden ward, praktische Teile der Mathematik auf der Universität von einem wirklichen Praktiker lehren zu lassen, und wie man versuchte, dies mit dem Geiste der Universität als vereinbar zu denken: „*habebitque posteritas etiam hoc specimen sapientiae illius, qua condita et constituta est haec Georgia-Augusta literarum Universitas, quod aedificandi artes apud nos discendi facta volentibus copia est, quod vir huic negotio praepositus, in quem conveniret Vitruvianus ille finis, architectum postulantis, qui nec sine literis contendat, ut manibus sit exercitatus, nec ratiocinationibus et literis confisus solis, umbram non rem consecutus videatur; sed qui utrumque perdidicerit*" aber doch *placet hic adscribere, ne quis putet, omne manuum artificium a nobis contemni, locum* Ciceronis *in* Bruto c. 73, *cui credo nemo non, qui sit modo paullo humanior, suscribet: Atheniensium plus interfuit firma tecta in aedificiis habere, quam Minervae signum ex ebore pulcherrimum; tamen ego me Phidiam esse mallem, quam vel optimum fabrum tignarium.*

2) Über Joh. Mich. Müller, sowie über die im Text gleich zu erwähnenden Dozenten: Geo. Mor. Lowitz, Joh. Mich. Franz usw. vgl. Joh. Steph. Pütter, Gelehrtengeschichte 1 und 2.

kosmographischen Gesellschaft nach Göttingen, dessen Seele der später als Geograph in Göttingen angesetzte Professor Joh. Mich. Franz (1700—1761) war, zu erzählen. Jedenfalls wurden die geplanten und versprochenen Erdgloben nie fertig, Lowitz geriet in Schulden, die durch das Vermögen seiner Frau gedeckt wurden, und schließlich sah er sich, da er es zu Vorlesungen eigentlich nie brachte, genötigt, sein Amt als Professor niederzulegen, worauf er denn bald (1763) Göttingen verließ, um einen Ruf an die Petersburger Akademie anzunehmen.

Überhaupt aber fallen in jene Zeit — von der Mitte der 50er Jahre an — mancherlei Unruhen und Verwicklungen, von denen die Universität betroffen wurde, insbesondere durch die Invasion der französischen Truppen während des siebenjährigen Krieges. Es mag gestattet sein, bei der Detailschilderung dieser Zeit nicht länger zu verweilen. Es treten vielerlei Interessen und Personen in den Vordergrund, deren richtige Würdigung nur eine spezielle Monographie zu leisten vermag. Nur über die Mathematik stehe hier eine Bemerkung, als ein Sympton, daß in diese Zeit für sie eine neue Epoche fällt:

Die angewandte Mathematik, in der Periode des Rationalismus noch ein Sammelbegriff, beginnt sich allmählich in einzelne Teile zu spalten, die ebensoviele selbständige Bearbeiter erfordern. Kann Penther noch als der Vertreter der angewandten Mathematik angesehen werden, so ist dies bei Mayer und Lowitz nicht der Fall, die in erster Linie und eigentlich nur Astronomen und Geographen waren. Joh. Mich. Müller ist der Architekt, für die Kriegswissenschaften sucht man nach einem eigenen Vertreter, und A. L. Fr. Meister (1724—1788) wird der praktische Geometer, Joh. Beckmann (1739—1811) der Ökonom. Erfolgt mithin auch so eine Aufteilung der sonst *einen* Disziplin, so ist dies darum aber noch keine Zersetzung; insbesondere bleibt auch der Kontakt mit der reinen Mathematik erhalten, ja er beginnt sich in gewisser Hinsicht zu vertiefen und fester zu ketten. Die vollkommene Herausbildung dieses Zustandes ist das Werk der *Aufklärung*; zu seiner Schilderung gehe ich im folgenden Kapitel über.

Drittes Kapitel.

Die Mathematik der Aufklärung in Göttingen.

Abr. Gotth. Kästner und Albr. Ludw. Fried. Meister.

Das Zeitalter Chr. v. Wolfs hatte seine Mission erfüllt, an der Hand der an der Mathematik orientierten Philosophie Wolfs hatten die Deutschen wieder logisch denken und schreiben gelernt. Und wenn sich um 1750 herum auch schon die Anzeichen des Erwachens der schöpferischen Kraft in Literatur und Kunst bemerkbar machten — 1748 dichtet Fr. Klopstock (1724—1803) die drei ersten Gesänge seines Messias und 1755 erscheint Joh. Joa. Winckelmanns (1717—1768) Erstlingsschrift: „Gedanken über die Nachahmung der griechischen Werke in der Malerei und Bildhauerkunst" — so begann doch zunächst die Aufklärung ihren Siegeszug: „Aufklärung, der Ausgang des Menschen aus seiner selbstverschuldeten Unmündigkeit, Unmündigkeit, weil Unvermögen sich seines Verstandes ohne Leitung eines anderen zu bedienen, selbstverschuldete Unmündigkeit, weil die Ursache nicht am Mangel des Verstandes, sondern der Entschließung und des Mutes liegt, sich seiner ohne Leitung eines andern zu bedienen." „*Sapere aude!* Habe Mut, dich deines eigenen Verstandes zu bedienen! ist der Wahlspruch der Aufklärung", so sagt Jmmanuel Kant in seiner Beantwortung der Frage: Was ist Aufklärung? in der Berliner Monatsschrift 1784. Und wenn auch gerade unter dem Schutze der Aufklärung die historischen und klassischen Studien wieder Beachtung gewannen (Joh. Aug. Ernesti (1707—1781) in Leipzig und Chr. G. Heyne in Göttingen zogen ein Geschlecht heran, das in seinem Mannesalter die Zeit des Klassizismus und Neuhumanismus heraufführte) und die Mathematik von ihrer Sonderstellung herabsteigen und sich in den Kreis gleichgestellter Wissenschaften einfügen mußte, der Geist der Aufklärung war darum doch beherrscht von den Ideen der exakten Wissenschaften. Fr. J. Niethammer (1766—1848)[1]) schildert diesen Geist und die Tendenz jener Zeit mit folgenden Worten:

„Der große Impulsator seiner Zeit, mit welchem für Teutschland eine neue Bildungsepoche überhaupt beginnt, ist Friedrich der Zweite. In

---

1) Fr. J. Niethammer, Der Streit des Philanthropinismus und Humanismus in der Theorie des Erziehungsunterrichts unserer Zeit, Jena 1808. Vgl. zur Charakteristik der Zeit auch Fr. Ad. Trendelenburg (1802—1872), Friedrich der Grosze und sein Staatsminister Frh. von Zedlitz. Eine Skizze aus dem preußischen Unterrichtswesen, Berl. Monatsber. 1859, p. 95.

dem Reiche, das er durch seinen kräftigen Geist erschaffen hat, erhielt zu erst die deutsche Cultur eine vorherrschende Richtung auf Industrie und Gewerbfleiß. Die Forderung realer Nützlichkeit war jetzt an der Tagesordnung; reale Nützlichkeit aber hieß nur Einträglichkeit, materielle Produktion. Die laute, von der Regierung selbst ausgehende Anpreisung und ausgezeichnete Begünstigung des Landbaues, des Fabrikwesens, des Handels, der Industrie usw. mußte unausbleiblich auf überwiegende Schätzung mechanischer und technischer Geschicklichkeit wirken. Allein, es ist nicht bloß mechanische Betriebsamkeit, Gewerb- und Kunstfleiß, Handel und jede Art von Industrie, die man aus dem mächtig angeregten Umtriebe hervorgehen sieht: derselbe Geist, dieselbe Tendenz, dieselbe Regsamkeit zeigt sich auch in allen Zweigen des Denkens und der Bildung überhaupt. In der Erziehung, in der Religion, in der Philosophie, in dem ganzen Umkreis der Geistesthätigkeit war „praktisch" jetzt das allgemeine Losungswort; nur was unmittelbar ins Leben eingreifend, in der Anwendung fördernd war, wurde geachtet. Das ganze Gebiet des Wissens gewann dadurch neues Leben und eine neue Gestalt; die Wissenschaften wurden mit angestrengtem Eifer umgearbeitet, um sie von ihrer praktischen Seite darzustellen, und sie für die Praxis nützlich zu machen."

War also auch die Überschätzung der Mathematik geschwunden, eine allgemeine Wertschätzung war geblieben; und lag auch in der einseitigen Hervorhebung des realen Nutzens wieder der Keim zu neuen Krankheitserscheinungen an der *arbor frugifera*[1]) der Mathematik, war insbesondere die Gefahr einer Verflachung der rein wissenschaftlichen Behandlung zu fürchten, für den Augenblick war noch die Zeit günstig, eine gesunde Auffassung von der Mathematik, sowohl in ihren tiefergehenden Untersuchungen wie auch ihrer Bedeutung für die Anwendungen zu popularisieren. Ja JOH. ANDR. CHR. MICHELSEN (1749—1797) konnte später in seiner Forderung so weit gehen, von jedem Gebildeten die Kenntnis der Differential- und Integralrechnung zu verlangen.[2]) Ein solcher Förderer einer auf gesunden theoretischen Einsichten basierenden, mit der Praxis in enger Beziehung stehenden Mathematik war nun neben WENCESL. JOH. GUST. KARSTEN (1732—1787)[3]) in Bützow bezw. Halle der zu seinen Lebzeiten viel

---

1) LEONH. CHR. STURM, *Tractatus de natura et constitutione matheseos*, Francf. 1706, p. 14.

2) JOH. ANDR. CHR. MICHELSEN, Gedanken über den gegenwärtigen Stand der Mathematik und die Art, die Vollkommenheit und Brauchbarkeit derselben zu vergrößern, Berlin 1789.

3) Von 1758 bis 1760 z. B. publizierte KARSTEN „Beiträge zur Aufnahme der theoretischen Mathematik", Greifswalde.

gepriesene und nachher viel gescholtene Abraham Gotthelf Kästner, Segners Nachfolger in Göttingen. —

Wieder mögen einige biographische Notizen voranstehen, die ich Kästners eigener Darstellung in E. G. Baldingers Biographien jetztlebender Ärzte und Naturforscher I (1768), p. 46—74 und Chr. G. Heynes *Elogium* Abr. Gotth. Kästneri in *Commentar. rec. soc. reg. scient. Gott.* 15 (1800) entnehme, beide abgedruckt in F. Schlichtegrolls Nekrolog der Deutschen II² (1806), p. 172—230. Dieser Nekrolog ist eingeleitet mit den Worten: „Dieser große Mann und in strengstem Verstande weltberühmte Gelehrte verdient eine ausführliche Biographie, die ungemein interessant ausfallen muß, da sie einen der vielseitigsten Kenner der Wissenschaften, einen der größten Mathematiker aller Zeiten und auch als Mensch betrachtet eine der außerordentlichen und originellen Erscheinungen zum Gegenstande haben wird." Am 20. Juni 1900 war der hundertjährige Todestag Kästners, eine Biographie ist aber bis heute noch nicht erschienen. Und wenn auch die Literarhistoriker ein gewisses Interesse an Kästner als Epigrammatiker nehmen und so manches schätzbare Material zusammengetragen haben, — um ein richtiges und einheitliches Bild des Mannes zu gewinnen, muß man ihn als Mathematiker fassen, denn Kästner war vornehmlich Mathematiker.[1]) In der vorliegenden Arbeit aber wird man keine ausreichende Würdigung seiner Person und Leistungen erwarten; es werden nur einige Momente hervorgehoben und im übrigen als Maßstab der Beurteilung das Wort Fr. Hegels zu Grunde gelegt: „Wer, was seine Zeit will und ausspricht, ihr sagt und vollbringt, ist der große Mann der Zeit. Er thut, was das Innere und Wesen der Zeit ist, verwirklicht sie, und wer die öffentliche Meinung, wie er sie hier und dort hört, nicht zu verachten versteht, wird es nie zu Großem bringen."

Abraham Gotthelf Kästner, am 27. Sept. 1719 in Leipzig als einziger Sohn des späteren außerordentlichen Professors der Jurisprudenz Abr. Kästner geboren, genoß einen sorgfältigen Unterricht bei seinem Vater und Privatlehrern. Bereits mit 11 Jahren besuchte er die Vorlesungen seines Vaters und disputierte in den Übungen oft erfolgreich mit den viel älteren Studierenden. Später widmete er sich dann der Jurisprudenz, wurde schon 1733 Notarius und 1737 von der juristischen Fakultät als *candidatus iuris* examiniert.[2]) Nebenher aber hatte er mit besonderem Eifer, wesentlich

1) Vielleicht wendet sich das Interesse der Mathematiker doch noch einmal diesem merkwürdigen Manne zu, wie der ihm in mancher Hinsicht ähnliche Joh. Christ. Gottsched (1700—1766) auch erst spät die richtige Würdigung der Literarhistoriker findet. 2) In das gleiche Jahr 1737 fällt die Magisterpromotion, nachdem Kästner 1735 zum Baccalaureus ernannt worden war.

unterstützt durch seinen Onkel, einen Rechtsanwalt Pommer, mathematische und philosophische Studien getrieben, erstere besonders unter Christ. Aug. Hausen (1693—1743), der durch seine *Elementa matheseos*, Gorl. 1734 bekannt geworden ist.[1] Bei diesem hörte Kästner auch ein Kolleg über J. Newtons *Aritmethica universalis,* Londini 1707; als eine Frucht des Studiums dieses Werkes ist Kästners erste mathematische Schrift anzusehen: seine Habilitationsschrift aus dem Jahre 1739: *Theoria radicum in aequationibus determinatis,* Lipsiae 1739. Ebenso studierte er in dieser Zeit, aber privatim, Eulers *Mechanica, sive motus scientia analytice exposita,* Petropoli 1736. Von der Schwierigkeit, die ihm eine bestimmte Integration bei Euler machte und zum Beweise dafür, wie wenig man in jener Zeit auch bei einem so hervorragenden Lehrer wie Hausen in der Infinitesimalrechnung lernen konnte, erzählte Kästner später gern bei den verschiedensten Gelegenheiten; erst nach achttägigem vergeblichen Mühen fand er die Lösung bei Bernoulli in den *Actis eruditorum.* Überhaupt aber sah Kästner mit der äußerlichen Erledigung der erforderlichen Examina seine Lehrjahre noch nicht für abgeschlossen an, sodaß er seine Kenntnisse nach den verschiedensten Richtungen zu erweitern suchte: er trieb Botanik, Anatomie, gerichtliche Medizin, Diätetik und Chemie noch nach seiner Magisterpromotion. Besonders aber pflegte er eifrig die literarischen Beziehungen, die damals in Leipzig sehr rege waren. Man muß sich erinnern, daß Leipzig nach dem Untergange der Hansa 1686 rasch emporblühte, sodaß es bald Mittelpunkt eines vornehmen literarischen Verkehrs wurde. Es bildeten sich verschiedene literarische Zirkel und Gesellschaften, in denen Kästner gern verkehrte. Vor allem waren ihm seine Beziehungen zu Gottsched lieb. In den Anfang der 40er Jahre fallen

---

1) Ein anderer Lehrer Kästners in der Mathematik ist G. Heinsius (1709—1769), bei dem er 1737 Algebra nach Chr. Wolf hörte. Hierüber schreibt Kästner am 2. März 1798 an W. Olbers in Bremen: „Ich habe bei ihm (Heinsius) Algebra gehört, er las über Wolfs Anfangsgründe, die Woche vier Stunden, kam von Michaelis bis nach Ostern des folgenden Jahres bis an die Lehre von den krummen Linien, dann ging er nach St. Petersburg. Er machte alle Rechnungen von Buchstaben zu Buchstaben auf der Tafel; nun hatte ich Buchstabenrechnung für mich gelernt, die Stunde war von 2—3, und ich war manchmal schläfrig. Wenn er nun eine Rechnung anfing, machte ich die Augen zu und schlummerte solange ich mit der Kreide an der Tafel klappern hörte, wenn das aus war, ermunterte ich mich wieder.“ (Brief im Nachlasse Olbers, aus dem mir die Kästneriana von dem Direktor der Seefahrtsschule in Bremen, Herrn Professor Dr. C. Schilling, in liebenswürdigster Weise zur Verfügung gestellt wurden.) An denselben Professor Heinsius, der 1745 der Nachfolger Hausens in Leipzig wurde, ist Kästners *Demonstratio theorematis Harrioti* gerichtet, in der er von dem Gedanken der sukzessiven Differentiation der Ausgangsgleichung Gebrauch macht.

daher auch seine ersten schöngeistigen Publikationen in den „Belustigungen des Witzes und Verstandes". Schon damals wurde A. v. Haller sein Lieblingsschriftsteller. Zudem aber wurde durch diese literarischen Beziehungen Kästners Aufmerksamkeit auf die außerdeutsche Literatur gelenkt, womit er sich veranlaßt sah, die verschiedensten Sprachen zu erlernen. So beherrschte er denn allmählich die französische, italienische, spanische, englische, holländische und schwedische Sprache und zwar so, daß er sich in ihnen korrekt ausdrücken konnte. Welchen Vorteil er hieraus für seine spätere mathematische Tätigkeit gezogen hat, hat er oft betont. 1746 wurde Kästner 27jährig zum außerordentlichen Professor befördert mit der Aussicht bald eine ordentliche Lehrstelle zu erhalten.[1])

Das bisher ruhig verlaufene Leben wurde etwas gestört durch den 1747 erfolgten Tod von Kästners Vater, wodurch auf den Sohn die Fürsorge für die ohnehin kranke Mutter überging. Er suchte der Kindespflicht dadurch zu genügen, daß er den nötigen Unterhalt durch Übersetzungen erwarb, die er aus fremden Sprachen machte. Dabei wählte er sich gerne diejenigen Dinge aus, durch welche seine Kenntnisse erweitert wurden. So übersetzte er Cadwallader Coldens (1688—1776) „Erklärung der ersten wirkenden Ursache in der Materie, und der Ursache der Schwere"[2]) aus dem Englischen 1749; „Belustigungen der Vernunft" aus dem Französischen 1749; Jean Hellots (1685—1766) „Färbekunst"[3]) aus dem Französischen 1749 usw. Insbesondere aber übersetzte er vom 3. Bande an die Abhandlungen der kgl. schwedischen Akademie der Wissenschaften aus dem Schwedischen.[4])

Die Sorge für den Unterhalt veranlaßte Kästner auch, da eine Erledigung der Professur in Leipzig doch nicht nahe bevorstand, sich außerhalb nach einer Professur umzusehen. So bewarb er sich um die durch Penthers Tod erledigte Professur der Ökonomie in Göttingen, für die aber in Tob. Mayer schon ein Nachfolger ausersehen war.[5]) Den 1753 an ihn

---

1) Mathematische Arbeiten aus dieser Zeit sind zwei Disputationes pro loco: *Aequationum speciosarum Resolutio* Newtoniana, Leipzig 1743, und als Fortsetzung dieser Arbeit die *Disputatio* aus dem Jahre 1745: *De Resolutione aequationum differentialium per series.*

2) Der englische Titel ist: *An exposition of the first causes of action in matter and of the cause of gravitation,* New-York 1745.

3) Der französische Titel ist: *Théorie chimique de la teinture des étoffes,* Paris 1740/41.

4) Auch übersetzte er Neuerscheinungen auf dem Gebiete der schönen Literatur z. B. Montesquieu „Von den Gesetzen" und einen Teil der „Pamela" usw.

5) Nach einem Brief an Ephr. Scheibel in Breslau, Cod. MS. philos. 66 der Göttinger Universitätsbibliothek. — Joh. Ephr. Scheibel verfaßte seit 1769 eine

ergangenen Ruf, in Göttingen Albr. v. Haller als Präsidenten der kgl. Sozietät zu ersetzen, lehnte er ab, weil er sich dieser Aufgabe nicht gewachsen fühlte: „wie ich Haller ersetzen könnte, begriff ich nicht“, schreibt er an Joh. Ephr. Scheibel. Erst als er 2 Jahre später die Aufforderung erhielt, Segners Nachfolger zu werden, nahm Kaestner den Ruf an. Aber auch diesmal scheint er sich nicht rasch entschlossen zu haben und nur Leipzig mit Göttingen vertauscht zu haben, um eine gesicherte Existenz zu erhalten. Jedenfalls hat er es später oft genug wiederholt, daß er nicht nach Göttingen gegangen wäre, wenn er in Leipzig eben so günstig situiert gewesen wäre.[1]) Zudem fallen in den Beginn der 50er Jahre Ereignisse, die Kästner immer mehr an Leipzig fesseln mußten. Es ist dies vor allem die Anerkennung, bei seinen Kollegen sowohl wie auch in der gelehrten Welt: die Mitarbeit an den *Actis Eruditorum* setzte ihn mit den mannigfachsten Gelehrten in Beziehung. Drei hervorragende Korrespondenten aus dieser Zeit sind L. Euler, M. de Maupertuis[2]) und der Kardinal Ang. M. Quirini (1680—1755).

Auch gehören dieser Zeit einige seiner wichtigsten Publikationen an, insbesondere auf dem Grenzgebiet von Mathematik und Philosophie[3]): 1751

„Einleitung zur mathematischen Bücherkenntnis“, wodurch er mit Kästner in Beziehung kam, mit dem er eine Anzahl Briefe wechselte (in den 90er Jahren des 18. Jahrhunderts).

1) Z. B. noch in seinem letzten Brief an Scheibel (23. April 1800) sagt Kästner: „Herr Hofrat Mayer aus Erlangen ist wiederum hier (als Nachfolger Lichtenbergs) mit sehr ansehnlichen Bedingungen, aber unzufrieden, er sagte zu mir selbst: bisher glaube er sich verschlimmert zu haben. Wäre ich in Leipzig in den Umständen gewesen, in denen er in Erlangen war, wäre ich nicht nach Göttingen gegangen“. (Aus einem Brief Kästners an M. Maupertuis [hierüber siehe folgende Fußnote] vom 6. Mai 1750 geht hervor, daß Kästner in Leipzig 400—500 Taler im Jahr zur Verfügung standen, von denen er sich die Hälfte durch Publikationen erwarb. In Göttingen bekam er dagegen 1040 ℛ Gehalt. — Es mag hier bemerkt werden, daß die Göttinger Universität nicht zum mindesten der gut eingerichteten Bibliothek und dem guten Gehalte, das den Professoren gezahlt wurde, so viele tüchtige Kräfte verdankte. —) Als Stelle, an der sich Kästner über seine Leipziger Lage äußert, citiere ich außer den Briefwechsel mit Maupertius noch: *Vita viri illustris atque celeberrimi* Abrahami Gotthelf Kästneri *magistri semisecularis Lipsiae D.* XXII. *Febr.* MDCCLXXXVII *renunciati iterdum edita.*

2) 28 Briefe von Kästner an Maupertuis mit Ausnahme von zweien (7. Okt. 1745 und 12. Nov. 1749) aus den Jahren 1750 bis 1752 (der letzte am 17. Juni 1752) veröffentlicht A le Sueur in *Maupertuis et ses correspondants,* Montreuil-sur-Mer 1896.

3) Ich nenne: *De habitu matheseos et physicae ad religionem, epist. ad Cardinalem* Quirinum 1752; *de lege continua in natura* 1751. Auf das in der ersten

gewann er mit der Dissertation: *Sur les devoirs, qui résultent de la conviction, que les événements fortuits dépendent de la volonté du Dieu* den Preis der Berliner Akademie, deren Mitglied er bald darauf wurde; auch erwählte man ihn in Göttingen als eins der auswärtigen Mitglieder der mathematischen Klasse [1]) der Sozietät der Wissenschaften.

Vom 21. Mai 1755 ist die Berufung A. G. Kästners als Professor der Mathematik und Physik in Göttingen datiert: „demnach Uns die Gründlichkeit und der weitläuftige Umfang eurer Wissenschaften nebst eurem Fleiß und besondere Begabniß dergestalt angerühmet worden, daß Wir dadurch bewogen worden, Euch zum ordentlichen Lehrer der Weltweisheit . . . . zu berufen" beginnt die Urkunde, aber sie fährt fort: „unsere Euch vorhin schon bekannd gemachte gnädigste Absicht gehet übrigens dahin, daß Ihr nicht nur durch fleyßige *Collegia* und gelehrte Schriften Euch ferner um das Publicum verdient machen, sondern auch einen fleißigen Mitarbeiter bey den Göttinger *Commentariis, Relationibus* und gelehrten Anzeigen abgeben, mithin Eure Geschicklichkeit zur Ehre und Aufnahme Unserer Universität und zum Nutzen und Unterricht der studierenden Jugend dem in Euch gesetzten gnädigsten Vertrauen gemäß, nach bestem Vermögen anwenden möget." [2]) Man sieht, Kästner sollte Haller ersetzen, und man wird sich dieser Absicht stets erinnern müssen, um Kästners ganzes Auftreten in Göttingen verstehen zu können. Zugleich ist damit die Schwierigkeit angedeutet, die entsteht, wenn man Kästner nur nach seiner mathematischen Tätigkeit, und hier besonders nur der Unterrichtstätigkeit schildern will. Immerhin mag sie für das Folgende den leitenden Gesichtspunkt geben; zu einigen weiter ausschauenden Bemerkungen wird dann an der einen oder anderen Stelle Gelegenheit sein. —

Ostern 1756 begann Kästner in Göttingen seine Unterrichtstätigkeit. [3]) Das erste war, daß auch er wie Segner vor ihm ein seinen Zwecken entsprechendes Lehrbuch der Mathematik schuf, das er seinen Vorlesungen zugrunde legen konnte. 1758 erschienen seine „Anfangsgründe der Arithmetik, Geometrie, ebenen und sphärischen Trigono-

Abhandlung behandelte Problem kommt er übrigens in seiner Göttinger Antrittsrede zurück: *Oratio de eo, quod studium matheseos facit ad virtutem.*

1) Kästners erste Abhandlung in den Kommentationen der Sozietät, zu denen er im Verlaufe der Zeit 47 Arbeiten beigesteuert hat, trägt den Titel: *Dissertatio de aberrationibus lentium sphaericarum,* Göttingen 1751.

2) „Personalakte Kästner" im Kuratorialarchiv.

3) Sein Antrittsprogramm: *Unde plures insint radices aequationibus sectiones angulorum definientibus. Invitatio ad audiendam orationem aditialem muneris: mathesin et physicam publice docendi,* 1756 wurde von ihm später zum Teil in seine geometrischen Abhandlungen eingearbeitet.

metrie und Perspektiv", denen später weitere Teile folgten, sodaß das Ganze unter dem Namen „Anfangsgründe der Mathematik" zusammenbegriffen wurde. Das Buch, in deutscher Sprache verfaßt, ist dem Kurator G. A. von Münchhausen gewidmet, dem er Rechenschaft ablegen wollte „von einem Teile des ihm anvertrauten Lehramts". Im übrigen bezeichnet Kästner seine Absicht bei Abfassung des Buches des näheren in der Vorrede folgendermaßen: „Meine Absicht ist durch gegenwärtiges Werk etwas zur Ausbreitung einer solchen Kenntniß der Mathematik beyzutragen, die dadurch erstlich recht brauchbar wird, daß sie gründlich und vollständig ist". In diesen Worten ist Kästners Auffassung von der Mathematik, wie er sie des öfteren später wiederholt ausgesprochen hat, in nuce enthalten: die Mathematik muß brauchbar sein; sie erreicht dies aber nur, wenn eine sichere Kenntnis der Grundlagen voraufgeht: Also allerdings Nutzen, aber zuerst theoretische Einsicht. Des näheren führt Kästner diese Auffassung in der Vorrede an einigen Beispielen aus. Soll z. B. die Mathematik zur Schärfung des Verstandes dienen, so darf man keine Sätze als bewiesen annehmen, für die nur „unzulängliche und zum Teil gar unrichtige Schlüsse vorgebracht sind". Hierher ist nach Kästner die Lehre von den Parallellinien und der Ausmessung der Körper zu rechnen. Wem es aber auf Geschicklichkeit in der angewandten Mathematik ankomme, dem dürfe es an einer Fertigkeit im Dezimalrechnen, an einer Einsicht in die Lehre von den Verhältnissen und dem Ursprunge der Logarithmen nicht fehlen, geschweige denn an der Kenntnis der gemeinen Buchstabenrechnung. Die genaue Ausführung dieser Dinge vermißte er in dem Lehrbuche von Wolf, dessen Aufgabe er ganz richtig in der Verbreitung einer ersten Kenntnis der Mathematik unter den Studierenden und auch Professoren sieht, von denen die letzteren „berühmter waren wegen ihrer Arbeitsamkeit, Folianten aus Folianten zusammenzuschreiben, als wegen der Aufmerksamkeit, eine kurze Reihe vernünftiger Schlüsse im Zusammenhange zu überdenken".

So wurde Kästner der Vermittler zwischen der fortschreitenden Wissenschaft und den Bedürfnissen der Praxis. Er selbst hat diese seine Stellung nicht verkannt. Schon 1749 und 1750 heißt es in den Briefen an M. Maupertuis[1]): *„Peut-être que vous verrés que, tout incapable que je suis d'éclairer le monde comme les grands génies parmi lesquels vous brillés avec un éclat supérieur aux autres, je sais au moins profiter de leurs lumières et les communiquer à d'autres qui sans cela peut-être n'en auroient*

---

1) Vgl. A. le Sueur, *Maupertuis et ses correspondants,* Montreuil-sur-Mer 1896, p. 273 und 276. Kästner äußert diese Worte gelegentlich der Ablehnung eines ihm von Maupertuis angetragenen Rufes an die Berliner Akademie.

tiré aucun avantage" und „*Trop faible pour augmenter le règne de la vérité par des nouveaux païs, ferai je assés en introduisant des nouveaux citoïens dans ceux qu'on habite déjà, en cultivant ces païs connus et en défendant les bornes et les droits contre des ennemis avec qui je crois me pouvoir mesurer.*"

Von welcher Wirkung diese Kästnerschen Anfangsgründe, besonders auch die weiteren Bände des ganzen Werkes, von denen einzelne in 3. und 4., die Anfangsgründe der Arithmetik in 6. Auflage erschienen, läßt sich ohne weiteres kaum übersehen. Fast alle in den späteren, besonders 70er und 80er Jahren entstandenen Lehrbücher fußen auf Kästner, und es wäre eine Aufgabe für sich, den Einfluß zu studieren, den diese Bücher auf die mathematische Lehrbuchliteratur des 18. Jahrhunderts gehabt haben. Man wird so noch deutlicher erkennen, daß es das unvergängliche Verdienst Kästners, des Lehrers Deutschlands in der Mathematik[1]), ist, zuerst eine auf gesunden Einsichten basierende brauchbare Mathematik in Deutschland popularisiert und damit den Weg frei gemacht zu haben für eine Anteilnahme auch der größeren Menge an den Forschungen der wenigen produktiven Mathematiker des Jahrhunderts. Wie wenige Leser zu Beginn von Kästners Lehrtätigkeit in Göttingen noch die Werke der Männer wie Clairaut, J. Le Rond d'Alembert, L. Euler usw. gefunden haben müssen, wie so noch gar kein mathematisches Milieu existierte, mag man aus folgenden Worten Kästners ermessen: „Die Lehre von den entgegengesetzten Größen und die Buchstabenrechnung ist jedem unentbehrlich, der ohne allzu große Weitläufigkeit, die notwendigsten Lehren einsehen, und in den Stand kommen will, sich selbst einigermaßen zu helfen. Wie ich sie hier vortrage, haben sie nichts Geheimnisvolles, und werden keinen Anfänger erschrecken. Sollte ja einer so furchtsam seyn, so will ich ihm zehn bis zwölf Oktavbände und Quartanten weisen, deren Verfasser auf verschiedenen Universitäten Deutschlands wegen der darinnen angebrachten Buchstabenrechnung für tiefsinnige Mathematiker, ja gar für Algebraisten gehalten werden, und ich will ihn auf meine Ehre versichern, daß ihn ein halbes Jahr in den Stand setzen soll, eben so tiefsinnige Werke zu schreiben, wenn er einen mittelmäßigen Fleiß nur bey so vielem Verstande und so vieler Aufmerksamkeit anwenden will, als ein Frauenzimmer braucht das *Taroc* spielet."[2])

Ich will nun an dieser Stelle, was die Behandlung des Stoffs angeht, auf eine nähere Charakterisierung desselben nur soweit eingehen, daß ich andeute, wie Kästner einige von ihm besonders bezeichnete Gegen-

1) So nennt ihn einmal Joh. Andr. Chr. Michelsen.

2) In der Vorrede zu den „Anfangsgründen der Arithmetik usw.", Göttingen 1758.

stände der Arithmetik und Geometrie in mehr logischer Form als früher geschehen, behandelt zu haben glaubt:

Alle Begriffe der Arithmetik beruhen nach Kästner auf dem Begriffe der ganzen Zahl; Brüche sind ganze Zahlen, deren Einheit ein Teil der ursprünglichen Einheit ist, Irrationalzahlen Brüche, deren Einheit veränderlich ist und ein stets kleinerer Teil der Einheit wird. Negative Größen sind Größen, „die man als die ihr entgegengesetzten betrachtet und dieses durch die Verneinung anzeiget“. So entscheidet sich für Kästner auch einfach die alte Streitfrage, ob die negative Größe „weniger als Nichts“ ist. In der Geometrie, „dem Vorbilde der vollkommenen Lehrart“, gibt er sich besonders Mühe, die Lehre von den Parallellinien ordentlich auseinanderzusetzen. Er erreicht dies, indem er klar den Punkt aufweist, wo ein bestimmter Satz sich nicht umkehren läßt resp. dessen Umkehrung nicht bewiesen war. Übrigens hatte Kästner früher in Leipzig in Hausens *Elementa Matheseos* einen Beweis gefunden zu haben geglaubt, dessen Hinfälligkeit ihm aber schon früh durch den Prediger G. Coste in Leipzig (1697—1751) angezeigt wurde. Seitdem hat das Parallelenproblem ihn nicht mehr verlassen, entweder er suchte die Schwierigkeit selbst zu heben oder er sammelte die Arbeiten anderer über diesen Gegenstand. So brachte er allmählich „eine kleine Bibliothek“ von Schriften über das Parallelenaxiom zusammen. 28 der wichtigsten dieser Versuche hat dann auf Kästners Veranlassung und mit dessen wesentlicher Unterstützung sein Schüler G. S. Klügel (1739—1812) kritisch bearbeitet: *Conatuum praecipuorum theoriam parallelarum demonstrandi recensio, quam publico examini submittent* Abr. G. Kästner ... *et auctor respondens* G. S. Klügel, Gottingae 20. 8. 1763.[1]) Unter diesen Versuchen wird „wegen ihrer Umständlichkeit“ von Kästner in den späteren Auflagen der Anfangsgründe besonders genannt: Vitale Giordano da Bitonto, *Euclide restituto,* Romae 1680 und H. Saccherii S. J. *Euclides ab omne naevo vindicatus,* Mediolani 1733. Eine Anwendung der vorgetragenen geometrischen Lehren gab Kästner in der Feldmeßkunst und

---

1) Den Anteil Kästners an dieser Arbeit bezeichnet Klügel auf pg. 2 mit den Worten: *ante tamen, quam hoc aggrediar, haud diffitendum mihi esse censeo, quantum in hoc labore Excell. Praesidi debeam, qui non solum rariores libros mihi indicavit, et pro sua humanitate mecum communicavit, verum etiam totum opus perpoliendum suscepit; quod etiam B. L. gratum erit: cum nihil se legere sciat, nisi quod ab Eo vel profiscatur, vel probetur.*

Aus dem Urteile Kästners stehe noch folgende Stelle hier: *Cuius rei historiam, consilia mea sequutus talem scripsisti, qualem scribi ab aliquo diu optaveram, diligentiam in colligendo, acumen in diiudicando, modestiam in pronunciando lectoribus satis probaturus, pauca vero mihi addenda reliquisti, quae suis locis inserui.*

Perspektive, wie er sich ausdrückt „um zu zeigen, wie angenehme und nützliche Künste auf den geometrischen Sätzen beruhen".

Eine nähere Ausführung aber möge hier aus den „Vorinnerungen von der Mathematik und ihrer Lehrart überhaupt" eingeschaltet sein, teils um für schon berührte Auffassungen Kästners von der Mathematik Belege beizubringen, teils um die späteren Bemerkungen über die nähere Ausgestaltung des mathematischen Unterrichts durch Kästner vorzubereiten.[1])

Den Ausgangspunkt bildet die Definition der Größe als etwas, das einer Vermehrung oder Verminderung fähig ist. Sofern man die Größe als abgesondert von allen anderen Eigenschaften einer Sache betrachtet, treibt man reine Mathematik, sofern man die anderen Eigenschaften mitbetrachtet, angewandte Mathematik.

Die Arithmetik unterscheidet sich von der Geometrie, insofern sie die Größe als ein Ganzes (*totum*), Menge von Teilen, betrachtet, während diese die Größe (auch auf die Verbindung und Ordnung sehend) als Zusammengesetztes (*compositum*) ansieht. Unter beide lassen sich alle Disziplinen der reinen und angewandten Mathematik begreifen, obwohl man der Bequemlichkeit wegen einige mit besonderen Namen belegt hat: ebene und sphärische Trigonometrie, Buchstabenrechnung und Analysis. Letztere lehrt das Unbekannte finden, indem man es als bekannt ansieht, und aus seinem Verhalten gegen andere bekannte Dinge herausbringt, wie es durch solche zu bestimmen ist. Die Alten haben das Muster der geometrischen Analysis ausgebildet, die Neueren haben sie dadurch erweitert, daß sie „die Größen allgemeiner als Zahlen betrachteten". So entstanden Algebra, die Lehre von den Gleichungen, und die Anwendung auf die Kegelschnitte und andere krumme Linien.[2]) Auf der Tatsache, daß man stetige Größen ohne Ende vermindern und vermehren, teilen und vervielfachen kann, beruht die Rechnung des Unendlichen, die sich in Differential- und Integralrechnung scheidet, „jenachdem man aus der gegebenen Vergleichung zwischen endlichen und bestimmten Größen, die Vergleichung zwischen den Geschwindigkeiten, mit denen sie sich ändern, oder aus der letzteren Vergleichung die erstere sucht".

---

1) Man vgl. zum Gegensatz oben die Exposition nach B. v. Rohr. Zugleich ist dies die Stelle, auf die oben wegen Segners *Elementa arithmeticae et geometriae* verwiesen wurde.

2) Hierüber hat A. G. Kästner seine Auffassung spezieller dargelegt in Joh. Mich. Hube, Versuch einer analytischen Abhandlung von den Kegelschnitten, nebst einer Vorrede von A. G. Kästner, Göttingen 1759. Speziell heißt der Titel der Vorrede: „Betrachtungen über die Beschaffenheit und den Gebrauch des analytischen Vortrags".

Die angewandte Mathematik wendet die Lehren auf die wirklichen Sachen selbst an. Buchhalten, in Handel und Wandel und Hauswirtschaft ist ebenso eine Anwendung der Arithmetik wie Feldmessen eine solche der Geometrie.[1]) Indem aber die angewandte Mathematik keine Grenzen als die Welt hat, so umfaßt sie alle Wissenschaften, bei denen sich Größen durch Schlüsse bestimmen lassen. Hier stehen voran, soweit Kräfte in Betracht kommen, die Mechanik, Hydrostatik und Hydraulik nebst Aërometrie; sofern es sich um das geradlinig fortschreitende Licht handelt, Optik, Katoptrik und Dioptrik, und wenn die Himmelskörper in Betracht gezogen werden, die Astronomie, von der die Lehre vom Zeitmaß: Gnomonik und Chronologie vorzüglich in die angewandte Mathematik gezogen wird. Dazu kommen noch „Geschützkunst, bürgerliche und Kriegsbaukunst", sowie die „Schiffkunst" (Nautik).

Über die mathematische Methode sagt Kästner: „Das Wesentliche derselben bestehet darinnen, was man lehret, aus Gründen, deren Wahrheit ungezweifelt ist, durch Schlüsse, deren Richtigkeit den Verstand zum Beyfall zwinget, darzuthun." Das Muster dieser mathematischen Methode ist für Kästner der Euklid, von dessen Schärfe in den Beweisen aber die neueren, insbesondere die Franzosen abgewichen seien, „um Leuten das Studium der Mathematik zu erleichtern, deren Hauptbeschäftigung das Studium nicht ist, insb. Kriegsleuten". Seinen Unmut über diese Vernachlässigung der Strenge in den Beweisen hat er an einer anderen Stelle[2]) in folgenden Worten geäußert: „Über die unzähligen geometrischen Lehrbücher kann ich nur sagen, daß von dem eigenen Werthe der Geometrie, Deutlichkeit und Gewißheit jedes desto weniger besitzt, je weiter es sich von Euklids Elementen entfernt. Aber Euklides wußte Königen keinen Weg zur Geometrie zu ebenen."

Der Schluß der Vorerinnerungen bringt bezüglich der Frage nach der Tragweite der Mathematik für die Auffassung der uns umgebenden Welt den resignierenden Ausspruch: „Die Mathematik überzeuget uns durch unzählige Proben, daß wir auch bei der höchsten Erkenntniß der Menschen zufrieden seyn müssen, der Wahrheit immer näher und näher zu kommen, die wir vielleicht nie völlig erreichen werden.

Weil sich unser Aug am Kleid der Dinge stößt." v. Haller. —

1) Kästner gab später 1785 selbst als Fortsetzung seiner Arithmetik ein Buch heraus: „Fortsetzung der Rechenkunst in Anwendung auf mancherley Geschäfte", in dem er bestrebt war, die gemeine Rechenkunst aus dem Handwerksmäßigen zu einer auf theoretischen Einsichten beruhenden „Kunst" emporzuheben. Die 2. Auflage des Buches vollendete Bernh. Thibaut, Göttingen 1801.

2) Z. B. p. 453 der 6. Auflage seiner Anfangsgründe der Arithmetik usw., Göttingen 1800

Hatte Segner in Göttingen nur seine Elemente der Arithmetik und Geometrie publiziert und die angewandte Mathematik unbearbeitet gelassen, so veröffentlichte hierüber Kästner schon im folgenden Jahre 1759 ein Kompendium: es sind dies „Anfangsgründe der angewandten Mathematik". Er setzte in ihnen so viel von den angewandten Disziplinen auseinander, als man „bei halbjährigen Fleiß" lernen konnte und als nötig schien, um die in den Spezialvorlesungen vorgetragenen Dinge mit Nutzen zu hören. Insbesondere mußte es Kästner hier nach seiner ganzen Idee auf eine gehörige Fundierung der gewöhnlichen Lehren ankommen. So behandelte er in der Statik z. B. ausführlich die Lehre vom Hebel, die er durchsichtiger als sonst üblich darstellte, in der Hydrostatik sorgfältig den Satz von den kommunizierenden Röhren, in der Aërometrie prüfte er eingehend die Folgerungen, die aus der Annahme der Elastizität der Luft folgen usw. Dabei lag eine gewisse Schwierigkeit der Behandlung darin, daß Kästner die höhere Analyse hier nicht anwenden durfte, um seinen Zuhörern nicht unverständlich zu werden. Es bekommen aber gerade hierdurch die Kästnerschen Bücher einen eigenen Reiz, indem sie die Entwicklungen, die in der Literatur oft undurchsichtig vorlagen, in origineller und oft eleganter und einfacher Weise dargestellt enthalten. Hier war denn auch vor allem und am ausgiebigsten für Kästner die Möglichkeit gegeben, die Fruchtbarkeit seiner oft ausgesprochenen Auffassung, daß es Pflicht eines Lehrers sei, den analytischen Vortrag mit dem synthetischen zu verbinden, zu beweisen: nicht eine allgemeine Rechnung fesselte und überzeugte ihn, sondern die Möglichkeit, sich von jedem einzelnen Schritte eine konkrete Rechenschaft zu geben. Er zitiert gelegentlich einmal Daniel Bernoulli, *Mem. de l'Acad. de Berlin* 1753, p. 148: *Une analyse abstraite, qu'on ecoute sans aucun examen synthetique de la question proposée, est sujette à nous surprendre plutôt, qu'à nous eclairer.*[1]) Übrigens hat Kästner den Stoff der 12 angewandten Disziplinen nur einmal in einem Bande bearbeitet, später[2]) mußte er sie in 2 Abteilungen trennen, besonders weil die Astronomie allein seit 1765 „größeren Wachstum bekommen hat, als zu unsern aufklärenden Zeiten alle übrigen Theile der Gelehrsamkeit, außer Mathematik und Physik zusammen". „Und das durch zweene Deutsche; Unterthanen Georg des Dritten", setzt er stolz hin.[3])

---

1) Vgl. das Antrittsprogramm: *Unde plures insint radices aequationibus sectionis angulorum definientibus,* Gott. 1756.

2) Die Anfangsgründe der angewandten Mathematik erschienen in 2. Auflage 1765, in dritter 1781, in vierter 1792.

3) Gemeint sind Tob. Mayer und W. Herschel (1738—1822).

Die Architektur, Artilleriewesen und Nautik hatte er schon in der ersten Auflage kaum gestreift und damit deutlich die Zugehörigkeit dieser Disziplinen zur angewandten Mathematik in Frage gestellt. Dies ist so zu verstehen, daß die Baukunst und Artilleriewissenschaften, soweit sie überhaupt mathematisch-physikalische Disziplinen sind, nicht der rationellen Bearbeitung unterworfen wurden, die die anderen Teile der angewandten Mathematik auf der Universität erhielten. Deshalb wurden sie vorläufig immer noch gelehrt, aber in einer späteren Zeit waren sie die ersten, für die Spezialschulen eingerichtet wurden: Bauakademie und Artillerieschule gehören ihrer Entstehung nach in das 18. Jahrhundert. —

Ergänzt wird diese Charakterisierung der beiden Kästnerschen Handbücher durch eine Schilderung der Tendenzen, die Kästner bei seinem Unterricht in der Elementarmathematik, der auch zu seiner Zeit noch nicht ganz den propädeutischen Charakter verloren hatte[1]), verfolgte, wie er sie in J. St. Pütters Gelehrtengeschiche 1, p. 299 ff. formuliert (1765). Es heißt dort u. a.: „Die Mathematik kann von Studierenden in mehr als einerley Absicht erlernt werden: ihren Verstand zu üben, und ordentlich und gründlich denken zu lernen: Wahrheiten sich bekannt zu machen, die ihnen bey dem Fleiſse, den sie auf andere Wissenschaften wenden, dienlich sind, und die Lehren der Mathematik selbst zum Nutzen und zur Bequemlichkeit des menschlichen Lebens anzuwenden.“ Diese drei Absichten suche er durch einen gründlichen, nicht zu schweren und doch umfangreichen Vortrag zu erreichen, der auch in den theoretischen Teilen stets auf die Anwendungen hinweise, die sich von den vorgetragenen Lehren machen lassen, wodurch er zugleich das Studium der einzelnen Disziplinen vorbereite. Dabei sei es natürlich, daß er von denjenigen Teilen der angewandten

1) Es muß aber doch hervorgehoben werden, daß die Mehrzahl der Studierenden sich die erforderlichen mathematischen Kenntnisse nur noch bei dem Professor der Logik und Metaphysik Andreas Weber (in Göttingen 1750—1770) erwarben, wie dieses aus den *vitae curriculis* der Doktoranden jener Zeit hervorgeht. — Übrigens heißt es über die Vorlesungen Webers bei J. St. Pütter 1, p. 229: „Der Prof. Weber pflegt die reine Mathematik so vorzutragen, daß zugleich die Absicht erhalten wird, welche man zu erreichen suchet, wenn die Zuhörer selbst nach der ausübenden Vernunft- und Erfindungskunst geübet werden sollen. Darum siehet er dahin, daß diese sich selbst in der Anwendung der Regeln dieser Wissenschaft üben. Sie müssen ihm, sobald er sie nur dazu zubereitet hat, die zu führenden Beweise selbst suchen, finden, ausführen. Versiehet dieser oder jener hierbey etwas, so zeigt er an, worinn der Fehler bestehe, wie man in selbigen verfallen sey, und wie er künftig verhütet werden könne. Kommen verschiedene auf verschiedene Beweise, so zeiget er, wie jeder nach den Regeln der Erfindungskunst auf den seynigen verfallen, und was etwa bey jeden besonders zu bemerken ist.“

Mathematik, wo es auf eine praktische Ausführung mehr ankomme, als auf theoretische Einsicht, eben insbesondere in der Artillerie, Baukunst und Fortifikation nur soviel gebe, als für einen gelehrten Menschen zu wissen anständig sei, da eine vollkommene Beherrschung nicht ohne Praxis möglich sei, die leider bei Studierenden und Lehrenden auf der Universität oft nur eine „gemahlte" sei. Im übrigen benutze er, um die Anschauung zu beleben, in seinen Vorlesungen Modelle, Maschinen und Werkzeuge, die die seit längerer Zeit bei der Universität vorhandene Modellkammer[1]) enthalte und die er oft durch eigene Instrumente usw. ergänze.[2]) —

Waren dies neben der Experimentalphysik die ständig sich wiederholenden Vorlesungen Kästners über Mathematik, so fand er doch schon

---

1) Was diese Modellkammer betrifft, so ist ihr Grundstock ein Geschenk der Erben des Freiherrn J. H. v. Bülow, aus dessen Büchersammlung auch die Universitätsbibliothek hervorgegangen ist. Vieles mag dann aus der Zeit Penthers stammen. 1765 war sie nach Pütter 1, p. 246 ein wenig in Unordnung geraten, wahrscheinlich weil sich T. Mayer wenig um sie kümmerte, vielmehr seine Haupttätigkeit dem Observatorium widmete. Die Sammlung enthielt verschiedene Modelle zur Mechanik, Statik, Hydraulik usw., besonders genannt wird das Modell eines engl. Kriegsschiffes (vgl. Pütter 1, p. 247) und die Leibnizsche Rechenmaschine, von der A. G. Kästner eine längere Beschreibung gibt (Pütter 1, p. 243—246). Später (1879) kam sie nach Hannover, von wo sie nach Göttingen eigentlich nur entliehen war, zurück. — Die Akten des Kuratorialarchivs enthalten reichliches Material zu einer Geschichte dieser Modellsammlung. Man kann nur immer bedauern, daß in einer späterer Zeit die Modelle z. T. verschwanden resp. verkauft wurden. Die vollständige Auflösung erfolgte nach dem Tode Just. Ulrichs 1879. (Übrigens darf man diese Modellkammer nicht mit der Sammlung mathematischer Instrumente verwechseln, die wesentlich aus einer Schenkung Bernh. Thibauts (1832) hervorgegangen ist.)

2) Auch war Kästner bemüht, sein reiches Wissen in der Geschichte der Mathematik seinen Zuhörern nutzbar zu machen. Insbesondere legte er Wert darauf, am Schlusse einer jeden Vorlesung eine *historia litteraria* zu geben, wobei er die Bücher seiner Bibliothek in den Vorlesungen vorlegte.

Es mag bei dieser Gelegenheit bemerkt werden, daß A. G. Kästner sich im Laufe der Zeit eine ausgezeichnete mathematische Bibliothek erwarb, die besonders durch ältere Drucke ausgezeichnet war. Leider ist die Bibliothek nach seinem Tode nicht als Ganzes erhalten worden. Von dem Umfang gibt der circa 7000 Nummern enthaltende Auktionskatalog eine Übersicht, von dem auf der Universitätsbibliothek in Göttingen ein Exemplar sich befindet, in das die Namen der Käufer und der Verkaufspreis eingetragen ist. Danach hat eine Reihe der seltenen Drucke die Göttinger Universitätsbibliothek erworben. — Leider ist mir bis jetzt noch nicht bekannt geworden, wohin der literarische Nachlaß Kästners gekommen sein mag. Er interessiert insbesondere wegen des ausgedehnten Briefwechsels, den Kästner seit ca. 1740 mit den hervorragendsten und bekanntesten Persönlichkeiten des 18. Jahrhunderts hatte.

in den 60er Jahren öfter, als er erwartete und seinem Vorgänger in Göttingen gelang, Gelegenheit, in besonderen Stunden über höhere Teile der Mathematik, vor allem Algebra zu lesen. Er sagt hierüber (Pütter 1, p. 301): „Die Algebra, zu der sich hier doch immer mehr Liebhaber gefunden haben, als ich erwartete, setzt Eifer zu eigenen Untersuchungen zum voraus, ohne welche man sich vergebens in ihr alles vorbuchstabiren läßt. Ich habe die Probe mehr als einmal gemacht, daß es mit dieser Voraussetzung möglich ist, in einer mäßigen Zeit Anfängern aus den beyden Bänden, die ich von der Analysis herausgegeben habe, so viel zu erklären, daß sie das übrige, wenn sie wollen, ohne Schwierigkeit für sich erlernen können. Was viele noch allein unter dem Namen Algebra verstehen, die Buchstabenrechenkunst, lernen meine Zuhörer, wo man es lernen muß, in der Arithmetik."

Die beiden hier als Kompendien genannten Bücher: „Anfangsgründe der Analysis endlicher Größen, Göttingen 1760" und „Anfangsgründe der Analysis des Unendlichen, Göttingen 1761" sind vielleicht die beiden wichtigsten, durch welche Kästner über seine unmittelbare Vorlesungstätigkeit hinaus so günstig für die Ausbreitung einer Kenntnis der höheren Mathematik in Deutschland gewirkt hat. Beide Bücher wurden alsbald bei den Vorlesungen auch auf andern Universitäten zugrunde gelegt;[1]) die Analysis endlicher Größen vertrieb die seit 1746 resp. 1752 gebräuchliche Algebra von Clairaut[2]); für die Analysis des Unendlichen gab es überhaupt kein Kompendium[3]) in deutscher Sprache.

Um nur einige Punkte aus diesen Büchern zu nennen, so sei auf folgendes aufmerksam gemacht:

Bei den unendlichen Reihen betont Kästner scharf, daß man wohl zwischen konvergierenden und divergierenden Reihen unterscheiden müsse.

---

1) So erschienen z. B. 1762 in Tübingen *Dilucidationes analyseos finitorum* Kästnerianae, die unter dem Präsidium von Johann Kies verteidigt wurden. Vgl. auch G. J. Holland, Inhalt des Kästnerischen Vortrags vom Newtonischen Parallelogramm, Tübingen 1765 und J. G. Pfeiffer, *Aequationum speciosarum resolutio per series ope parallelogrammi* Newtoniani *quam ad institutionem* Cel. Kaestneri *delucide evolvit* . . ., Tubingae 1765.

2) *Elémens d'Algèbre* par M. Clairaut, Paris 1746 in deutsch von Christlob Mylius (1678—1754), Des Herrn Clairaut . . . . Anfangsgründe der Algebra, Berlin 1752.

3) J. A. Segners *Elementorum analyseos infinitorum primarii,* erschienen Halae 1762. — Zur Orientierung setze ich die Daten von Eulers Werken hierher: L. Euler, *Introductio in analysin infinitorum,* Lausannae 1748.

— , *Institutiones calculi differentialis,* Berol. et Petrop. 1755.

— , *Institutiones calculi integralis,* Petrop. 1768—70.

Bei letzteren sei stets die „Ergänzung" in Betracht zu ziehen, widrigenfalls man auf Fragen stieße, wie solche, ob die Reihe $0 + 0 + 0 + \cdots$ den Wert 0 oder $\frac{1}{2}$ erhalte, indem sie aus der Reihe für $\frac{1}{1-x}$ $(x = -1)$ hervorgehe.[1]) Die Lehre von den „unmöglichen Größen" hat er deutlicher als sonst geschehen, auseinandergesetzt, indem er sich bei ihnen auf den Standpunkt von Leibniz[2]) stellt: „Es ist vergeblich sie vermeiden zu wollen, auch schaden sie der Gleichung und der Rechnung nicht." Am Schlusse des ersten Teiles der Analysis des Endlichen wird der Satz bewiesen: „Wenn man von einer Größe a die Hälfte, und von dieser die Hälfte, und von dieser zweiten Hälfte (dem Viertheile) wieder die Hälfte und von dieser dritten Hälfte (dem Achtheile) wieder die Hälfte usw. nimmt, so ist es allemahl möglich eine Anzahl von Halbierungen zu bestimmen, durch die man auf eine Größe kömmt, die kleiner ist als jede nach Gefallen angegebene Größe c," und dazu gibt er die Bemerkung: „Dieser Satz ist Euklidens I. Satz des 10. Buches und der wahre Grund der Schlüsse, die man jetzo durch die Ausdrückungen des Unendlichen abzukürzen pflegt, deswegen ich seinen Beweis überzeugend vorzutragen gesucht habe."[3]) Den zweiten Teil des Buches bildet die Algebra. Hier betont Kästner, daß das Denken dem Umsetzen der Gedanken in Zeichen voranzugehen habe, wie denn überhaupt das Rechnen nicht heiße, „aus gegebenen Zahlen, son-

1) Vgl. auch die Abhandlung: *de lege continui*, Lipsiae 1750 (abgedruckt in *Dissertationes mathematicae et physicae quas societati regiae scientiarum Gottingensi annis* 1756—1766 *exhibuit* Abraham Gotthelf Kästner, Altenburg 1771, p. 142 ff.), wo er auch darauf hinweist, daß Fragen, wie diese: warum in $\sqrt{1-x} = 1 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 - \ldots$ für $x > 1$ eine imaginäre Größe durch eine Reihe reeller Größen dargestellt würde? nur entstehen, wenn man das Restglied (das in diesem Falle stets imaginär sei) unberücksichtigt läßt.

2) Kästner zitiert einen Brief von Leibniz an Oldenburg 1676 in Wallisii *Opera, tom.* 3, Oxford 1699, p. 632: *et verae realesque sunt quantitates si inter se conjunguntur, ob destructiones virtuales. Quod multis elegantibus exemplis et argumentis deprehendi. E. g.* $\sqrt{1+\sqrt{-3}} + \sqrt{1-\sqrt{-3}} = \sqrt{6}$. *Tametsi enim, neque ex binomio* $\sqrt{1+\sqrt{-3}}$ *neque ex binomio* $\sqrt{1-\sqrt{-3}}$ *radix extrahetur, nec proinde sic destruetur imaginaria* $\sqrt{-3}$, *supponenda tamen est destructa esse virtualiter, quod actu appareret, si fieri posset extractio. Alia tamen via haec summa reperitur esse* $\sqrt{6}$.

3) Kästnerus *rigoris mathematici studiosissimus* war ein ihm schon 1765 von M. J. G. Pfeiffer (vgl. Fußn. 1 pg. 65) beigelegter Titel. Er selbst hatte in seiner Disputation 1743: *Aequationem speciosarum resolutio* Newtoniana *per series* von der durch John Colson (1680—1760) explizierten Methode des Newtonschen Parallelogramms gesagt: *Hoc an sufficiat rigoris mathematici studiosis, ignoro, mihi certe non suffecit.*

dern aus ihrem gegenseitigen Verhalten andere finden". Den Fundamentalsatz der Algebra kennt Kästner, bei seinem Beweise setzt er aber die Existenz der Wurzeln implicite schon voraus. Den dritten Teil der Analysis endlicher Größen bildet die Lehre von den krummen Linien, insbesondere den Kegelschnitten. Kästner stellt hier als Definition der stetigen Größe voran: „In einer Reihe von Größen erfolgt das Wachstum oder das Abnehmen derselben nach dem Gesetze der Stetigkeit, wenn nach jedem Gliede der Reihe eines folget, oder ihm vorhergehen kann, das so wenig als man nur will von dem angenommenen Gliede unterschieden ist, so dafs der Unterschied zweyer nach einander folgender Glieder weniger als jede gegebene Größe betragen kann."

Die Vorrede seiner Analysis des Unendlichen beginnt Kästner mit einer Darlegung seiner Ansicht vom Unendlichen: „Wie sich der kühne Ausdruck eines Dichters, von dem vielleicht logisch richtigeren, aber trockenen Vortrage des Philosophen unterscheidet, so ist ungefähr die Rechnung des Unendlichen von den Beweisen der Alten unterschieden." Kästner kennt das Unendliche als ein progressiv Unendliches[1]) und „sobald wir das Unendliche als etwas wirkliches und schon vorhandenes vorstellen, widersprechen wir der Erklärung eines wirklichen Dinges; im Unendlichen geschehen, heißt niemals geschehen".[2]) Im übrigen benutzt er bei seiner Exposition die Methode Newtons von den ersten und letzten Verhältnissen, vermeidet aber die gewöhnliche Schreib- und Redeweise nicht, indem er gehörigen Ortes zeigt, wie dies nur Abkürzungen des Vortrages sind: „Ein

---

1) Für die witzige und oft geistreiche Darstellung Kästners, auch in seinen mathematischen Schriften, folgendes Spezimen:

Er erörtert, daß die ersten Glieder einer unendlichen Reihe das Gesetz des Fortgangs schon festlegen, und fährt fort: „Ist es so was Ungereimtes, als der Freygeist, und der zu weichherzige Fromme uns bereden wollen: daß unser Schicksal für eine Ewigkeit durch das gegenwärtige Leben bestimmt wird? können unsere jetzigen Jahre nicht die ersten Glieder in den Theilen einer Gleichungsreihe seyn, dadurch alle die folgenden ohne Ende bestimmt werden?

Paucula jam series monstrat primordia nascens
Lege sua partes haec sine fine regunt:
Qualiter a vita quam bis sex lustra coercent
Aeva tenent formam non numeranda suam."

Man wird an J. Boussinesqs Spekulationen erinnert: *Conciliation du véritable déterminisme mécanique avec l'existence de la vie et la liberté morale,* Paris 1879. — Der Vers Kästners übrigens schon 1745 als Motto der dem Grafen Chr. Gottlieb von Holzendorf gewidmeten Schrift: *De resolutione aequationum differentialium per series.*

2) Es ist klar, daß Kästner „geschehen" auf die gewöhnlichen Axiome der Arithmetik bezieht, an denen er festhält.

Frauenzimmer, das die Natur vollkommen wohl gebildet hatte, giebt sich zuweilen durch eine Kleidung nach der Mode ein ungestaltes Aussehen: und die Rechnung des Unendlichen scheint in der Hülle solcher Redensarten Fehler an sich zu haben, die dadurch nicht bedeckt werden, daß sie dem Mathematikverständigen unerschöpfliche Sätze von Erfindungen darbietet: Denn für die Augen eines Geistes, dem nur Wahrheit schön ist, würde sie doch allemahl eine häßliche Reiche seyn. Zum Glücke sind es nur Fehler ihrer Kleidung; zuweilen hat sie sich ungeschickter Schneider bedient, zuweilen hat sie mit Willen in der Eile eine Salope um sich geworfen, und der Geometer kann so entzückt als Ovid sagen:

Ut stetit ante oculos posito velamine nostros
In toto nusquam corpore menda fuit."[1])

Auf eine weitere Darlegung des Inhalts des Buches gehe ich nicht ein Es genüge zu betonen, daß durch dasselbe hindurch der Geist der Strenge geht, von dem iu der Vorrede gesprochen wird. Kästner wußte sich hier etwas im Gegensatz zu Euler, dem *summus inter analystas*, in dessen *Institutiones calculi differentialis* er öfter die klare und ganz einwandsfreie Exposition vermißt. —

Man wird nun fragen, welche Lehrerfolge Kästner in seinen höheren Vorlesungen erzielte. Leider sind hierüber ebenso wie bei Segner die Nachrichten nicht sehr zahlreich und wieder läßt sich allgemein nur wenig sagen: Bald nach Kästners Ankunft in Göttingen brachte der 7jährige Krieg der jungen Universität manche Unruhe — insbesondere war die Stadt vom 16. Juli 1757 bis zum 28. Febr. 1758 und dann vom 20. Sept. 1760 bis 16. August 1762 von den Franzosen besetzt[2]) —, so daß sich wenige Studenten für die höheren Vorlesungen einfanden. Dafür

---

1) In einer am 8. Mai 1759 der Sozietät vorgelesenen Abhandlung: *De vera infiniti notione* heißt es am Schluß: . . . *in differentialium calculo non negliguntur infinite parva ob exiguitatem, sed limes ad quam ratio quaedam variabilis, data quavis quantitate magis accedit, huius rationis loco ut antiqui fecerunt adhibetur. Haec differentialium ratio, eadem est cum ratione spatiorum quae eodem tempore describerentur celeritatibus iis, quibus quantitates dato instanti mutantur. . . . Minus accurate igitur calculi differentialis scriptores differentialia velut augmenta quae actu accedant ad quantitates variabiles considerant, cum augmenta sint, quae accederent, si quantitates data velocitate tempore quodam dato mutarentur. . . .*

In bezug auf die Abhandlung Kästners sagte Joh. Matth. Gesner von der Mathematik: *Nisi fallor, haec eadem doctrina ad portenta τῶν ἀσυμπτώτων minuenda prodest.* (Vgl. Abhandlung V in A. G. Kästner, *Dissertationes mathematicae et physicae,* Altenburgi 1771.)

2) Infolge des Verdrusses und Ungemaches, die diese zweite Okkupation mit sich brachte, starb bekanntlich T. Mayer am 20. Febr. 1762.

aber kamen die französischen Offiziere gerne in Kästners Vorlesungen, um bei ihm zu lernen[1]), wodurch Kästner bei seinen Kollegen nicht wenig im Ansehen stieg, zugleich aber auch der Grund zu manchen später hervorgetretenen Mißhelligkeiten gelegt wurde. Erst nach dem Kriege finden wir um Kästner eine Zahl fortgeschrittener Schüler versammelt. Aus den 60er Jahren nenne ich unter den bekannteren G. S. Klügel[2]), G. Chr. Lichtenberg (1744—1799), J. Math. Ljungberg[3]) und Joh. Chr. Polycarp Erxleben (1744—1777), aus den 70er Jahren etwa Joh. Tob. Mayer, Tobiae *filius* (1752—1830) und Wilhelm Olbers (1758—1840).

Man wird erwarten dürfen, indem man auf gelegentliche Äußerungen dieser Männer zurückgreift, ein einigermaßen ausreichendes Bild von Kästners Lehrtätigkeit und Lehrerfolgen zu erhalten. Ich kann hier vorläufig nur die Äußerungen einiger anführen, wie sie sich in den Lebensläufen finden, die bei der Bewerbung um die Magisterwürde eingereicht werden mußten, und aus denen eine Dankbarkeit gegen den Lehrer hervorleuchtet, die der Briefwechsel aus späterer Zeit belegen müßte. So sagt Ljungberg in seinen *litteris petitoriis* 1770: *In Mathesi praelectionibus Illustris* Kästneri *in Mathesin puram, applicatam, Analysin finitorum atque infinitorum, Astronomiam practicam et Mechanicam sublimiorem usus sum;* und setzt hinzu: *deinde vero Fortuna fautrix me tanti Viri benevolentia donavit, cui plura debeo beneficia, quam quae hic enumerari et ullis gratiis referri possent.* J. Tob. Mayer sagt bei gleicher Gelegenheit 1773: *Inprimis ad Matheseos studium incitatus sum, ob summum rigorem, quem in demonstrandis veritatibus observat haec scientia. Illustris igitur* A. G. Kästneri *praelectionibus tam in Elementa matheseos purae et applicatae, quam etiam in reliquas Matheseos sublimioris partes interfui* und setzt die Widmung seiner Dissertation[4]) an Kästner die Worte hinzu: *patrono et fautori suo*

---

1) Er konnte ihnen den Vortrag in französischer Sprache halten.

2) Er wurde 1765 Korrespondent der kgl. Sozietät und zugleich Professor zu Helmstedt, wo er bis 1787 blieb. Von hier aus kam er als Nachfolger W. Karstens, der seinerseits Nachfolger von Segner 1777—1787 war, nach Halle, wo er bis zu seinem Tode 1812 lehrte. Sein Nachfolger war dann wieder ein Helmstedter Lehrer Joh. Fr. Pfaff (1765—1825).

3) War später Professor in Kiel (die Kieler Universität war in dieser Zeit dänisch).

4) Der Titel ist *Tetragonometriae specimen,* Göttingen 1773. Kästner bemerkt in der Missive vom 17. April 1773 (Akte der philosophischen Fakultät): „Herr Mayer, ein Sohn unseres vormaligen Kollegen sucht ihn zu prüfen, ob er die Magisterwürde erhalten kann. Außer seinem Bittschreiben und Lebenslauf hat er auf mein Anrathen die Disputation beygelegt, die er zu vertheidigen gedenkt und die von seinem Fleiße und Einsichten ein gutes Zeugniß giebt, welches

summo pietatis cultu devenerando praeceptori suo benignissimo. Aus Olbers' Nachlaß ist mir ein Heftchen bekannt geworden, das das weitgehende Interesse Kästners für die Tätigkeit seiner Schüler illustriert. Es sind kleine mathematische und physikalische Versuche, die Olbers in dem Jahre 1778 verfaßte und sie Kästner unterbreitete, der sie las und gegebenenfalls korrigierte. Auf vier Quartseiten entwickelt Kästner z. B. die elementare Aufgabe: „die vorteilhafteste Stellung einer Hebellade zum Umwerfen der Bäume zu berechnen,“ von der Olbers eine z. T. unrichtige Lösung gab.

Insbesondere aber hat Kästner nach einer Seite anregend auf diese seine Schüler gewirkt, indem er sie auf dem Observatorium in die Astronomie einführte. Nach dem Tode T. Mayers haben zunächst Lowitz und Kästner gemeinsam die Sternwartendirektion erhalten. Da Lowitz aber schon 1764 sein Amt als Professor niederlegte, erhielt Kästner die Direktion allein, die er auch bis 1789 geführt hat. Als Frucht dieser seiner Beschäftigungen mit der Astronomie erschienen von Kästner 1772—1774 seine vielgelesenen Astronomischen Abhandlungen, Teil 1 1772, Teil 2 1774. Allerdings wird man dem Urteil Chr. G. Heynes, das dieser gelegentlich (4. Juni 1770) nach Hannover berichtet[1]): „Da er (Kästner) seiner Schwäche von der Seite der astronomischen Wissenschaften sich bewußt ist, so macht ihm alles, was auch noch so entfernt ist, *Ombrage*,“ beipflichten müssen, aber darum ist Lowitzs Urteil[2]) doch zu hart: ... „Kästner, der wie ich nur offenherzig melden muß, noch nicht aus den Schranken der Anfangsgründe für die alte, und jetzt gäntzlich unbrauchbare Astronomie gekommen ist und der von der neuen wenig oder nichts versteht, und sich noch weniger Einsichten in die Observationen der Himmelsbegebenheiten erworben hat; wie alle seine gedruckten Sachen einen jeden wahren Astronomus schon längst hiervon überzeugten.“ Jedenfalls aber haben viele Kästner ihre erste Einführung in die Astronomie warm gedankt, und nicht zum wenigsten G. Chr. Lichtenberg, der von 1770 an *Prof. extraord.*, von 1775 an als *Prof. ord.* Kästner, wenn auch nicht nominell, so doch faktisch in der Sternwartendirektion zur Seite stand. Überdies hatte

---

desto unverdächtiger seyn kann, weil ich weder von der Wahl seines Gegenstandes, noch der Ausarbeitung das geringste gewußt habe, ehe er mir den Aufsatz gebracht hat.“ Mit dieser Arbeit lehnt sich Mayer an J. H. Lambert (1728—1777), „Beiträge zur Mathematik“ an. (Vgl. J. H. Lamberts deutscher gelehrter Briefwechsel, herausg. von Joh. Bernoulli, Bd. 2, Berlin 1782: Brief Mayers vom 7. Oktober 1772.)

1) „Personalakte Lichtenberg“ im Kuratorialarchiv.

2) Brief vom 4. März 1762 an von Münchhausen (Akte „betr. die dem Prof. Lowitz aufgetragene Aufsicht des *Observatorii*“).

sich Kästner mit der Zeit immer mehr in die Astronomie eingearbeitet, so daß er später über C. Fel. Seyffer dasselbe Urteil zu fällen wagte, wie vordem Lowitz über ihn. Ermöglicht wurde Kästner[1]) diese Übernahme der astronomischen Professur wesentlich dadurch, daß G. Chr. Lichtenberg es übernahm, über die Naturlehre zu lesen, womit übrigens in Göttingen (zunächst stillschweigend) die Trennung zwischen Mathematik und Experimentalphysik vollzogen wurde, die sich bei dem Anwachsen beider Disziplinen immer mehr als Bedürfnis herausstellte. Lichtenberg, der allerdings auch noch über Mathematik, z. B. 1770 ein Privatkolleg über die Theorie der Kegelschnitte las, wurde somit der erste Professor der Physik in Göttingen. Ihm ist auch die erste Sammlung von physikalischen Instrumenten und Apparaten zu danken, die den Grundstock des späteren physikalischen Kabinetts bildete.[2]) —

Es sind dies einige Momente der Lehrtätigkeit Kästners aus dieser seiner ersten und bedeutungsvollsten Zeit seiner Göttingenschen Professur, deren Höhepunkt hier bezeichnet ist durch die Prägung einer Schaumünze auf Kästner, die 1770 der Fürst von der Lippe ausführen ließ. Zu ergänzen aber wäre dieses Bild durch eine Darlegung von Kästners sonstiger Tätigkeit in diesen Jahren. Jedoch es ist ganz unmöglich, hier die Vielseitigkeit Kästners als still arbeitenden Gelehrten und als nach außen hervortretenden Organisators erschöpfend zu würdigen. Lichtenberg[3]) hat in einem seiner Aphorismen „Vergleichung von Leuten mit

---

1) Er sagt selber: „Ich habe die Physik Lichtenberg und Erxleben überlassen, weil es mir Mißvergnügen machte, daß die meisten die Physik nur sehen, nicht darinnen lernen wollen. In der Mathematik habe ich doch immer Zuhörer, die nachdenken wollen.“ (Brief an Scheibel.) Auch las Kästner in späteren Jahren nicht mehr eine als Einleitung in das mathematisch-naturwissenschaftliche Studium gedachte Vorlesung über Enzyklopädie der Mathematik und Physik, die ergänzt wurde durch eine ähnliche Vorlesung über die klassisch-historischen Disziplinen: Vgl. J. M. Gesneri *Primae lineae isagoges in eruditionem universalem, nominatim philologiam, historiam et philosophiam,* Gött. 1757 (2 ed. 1762), auch herausg. von Jo. Nic. Niclas, Lips. 1774. Kästner publizierte nur ein kurzes Programm: *Programma matheseos et physicae idea generalis in usum lectionum encyclopaedarum,* Gott. 1757.

2) Vgl. E. Riecke, „Zur Geschichte des physikalischen Instituts und des physikalischen Unterrichts an der Universität Göttingen“ in F. Klein und E. Riecke, Über angewandte Mathematik und Physik in ihrer Bedeutung für den Unterricht an den höheren Schulen nebst Erläuterung der bezüglichen Göttinger Universitätseinrichtungen, Leipzig 1900.

3) G. Chr. Lichtenberg, Aphorismen (1764—1771) herausg. von A. Leitzmann, Berlin 1903, p. 114. Von Lowitz heißt es: *Avis au lecteur sur quelque chose qui va paraître bientôt, avec un avis concernant le second avis* (in bezug auf das nie

Büchern" Kästner ein „*Dictionnaire encyclopédique*" genannt und der Verfasser des „letzten Wortes über Göttingen"[1]) nennt ihn den „merkwürdigsten Mann Göttingens". Um nur einiges zu nennen, so sei daran erinnert, daß Kästner nicht nur eines der tätigsten Mitglieder der kgl. Sozietät der Wissenschaften war, sondern auch als Rezensent zu den gelehrten Zeitungen mehr beisteuerte als A. v. Haller seiner Zeit. Zudem war er seit 1762 Ältester der deutschen Gesellschaft in Göttingen, die sich die Pflege der deutschen Literatur, nicht nur nach Seiten der Sprache, Beredsamkeit und Dichtkunst, sondern auch nach Seiten der Länderkunde, Geschichte, Altertümer und Rechte zum Ziel setzte, und hat als solcher nicht zum wenigsten für die Ausbildung einer deutschen Gelehrtensprache viel gearbeitet. Bei der 50jährigen Jubelfeier der Universität Göttingen 1787 hielt er geradezu eine Vorlesung: „Über den Vortrag gelehrter Kenntnisse in der deutschen Sprache".[2]) —

Ausführlicher mag nur noch auf zwei Werke eingegangen sein, an denen Kästner in den 60er Jahren viel arbeitete und die sein Hauptwerk: Die Anfangsgründe der Mathematik zum Abschluß bringen: „Anfangsgründe der höheren Mechanik"[3]), Göttingen 1765 und „Anfangsgründe der Hydrodynamik", 1769.[4]) Schon der Untertitel der Mechanik: „besonders die praktischen Lehren enthaltend" läßt erkennen, daß Kästner auch hier von seiner Grundauffassung von dem Wert und Zweck der Mathematik geleitet ist: auch die Mechanik muß ihm brauchbar sein, sie muß praktische Anwendungen gestatten; sie wird es durch vorherige genaue Orientierung über die Grundlagen. Daher findet sich auch in seiner „Mechanik" eine gute Exposition der grundlegenden Begriffe: Kraft[5]), Trägheit, Stoßgesetze, Gesetz von der Erhaltung der lebendigen

---

vollendete „Kugelunternehmen"). — Zur Illustration der Wertschätzung, die Kästner damals genoß, diene folgendes Rätsel (ebenda p. 63):

Er ward in Leipzig geboren; der Stolz eines Königs der Britten und das Wunder Deutschlands. Wer ist dies? Unter den Toten war es Leibniz, unter den Lebenden ist es Kästner.

1) Letztes Wort über Göttingen und seine Lehrer (anonym), Leipzig 1791.

2) Wieviel die deutsche mathematische Kunstsprache ihm verdankt, ist heute nur wenig gekannt. Für die Elementarmathematik orientiert hierüber Joh. Tropfke, Geschichte der Elementarmathematik, 2 Bde., Leipzig 1903.

3) Vollständiger heißt der Titel: „Anfangsgründe der höheren Mechanik, welche von der Bewegung fester Körper besonders die praktischen Lehren enthalten". Die 2. Aufl. 1793.

4) Vollständiger: „Anfangsgründe der Hydrodynamik, welche von der Bewegung des Wassers besonders die praktischen Lehren enthalten". 2. Aufl. 1797.

5) Der fundamentale Kraftbegriff ist die Schwerkraft. Alle andern werden nach der Analogie mit dieser gebildet. Dabei warnt Kästner vor einer allzu-

Kräfte usw. Als interessante Einzelheit mögen hier noch die Ausführungen über den Wert der Rechnung des Unendlichen bei der Begreifung der Außenwelt stehen. Er sagt hierüber: „Unsere Kenntniß der wirklichen, oder, wie ich sie lieber nennen wollte, der scheinbaren Welt, gründet sich auf Erfahrungen und Schlüsse, die sich daraus herleiten lassen. Ohne Ausmessungen und Berechnungen ist hier nichts zuverlässig und bestimmt; die Analysis und besonders die Rechnung des Unendlichen sind notwendig die Natur kennen zu lernen, wie es notwendig ist, Latein zu verstehen, um den Cicero und Vergil zu lesen; sie werden durch ihre Anwendung auf die Kenntniß der Natur erweitert, und mit neuen Kunstgriffen vermehrt, wie man in der Sprache der römischen Schriftsteller, durch fleißiges Lesen geübter und vollkommener wird. Man solle aber nicht versuchen den Standpunkt zu verkehren und in der Mechanik nur Anwendungen der Rechnung des Unendlichen sehen: Es giebt Leute, die nicht die Sprache der Schriftsteller wegen lernen, sondern die Schriftsteller der Sprache wegen lesen. Es wäre gut, wenn die Mathematikverständigen es nie so gemacht hätten. Meines Erachtens wenigstens ist in der Theorie die edelste Beschäftigung: Denken[1]); Beim Rechnen verbindet man Zeichen eben in der Absicht, daß man sich die Mühe an die Bedeutung der Zeichen alle Augenblicke zu denken ersparen will. Aber bei der ersten Anordnung und Verbindung dieser Zeichen muß man die Begriffe wohl kennen, die man durch sie ausdrücken will, und genau wissen, wie weit sich diese Begriffe durch Zeichen ausdrücken lassen." Und deshalb auch hier wieder Sorgfalt bei der Grundlegung. Im übrigen schließt sich Kästner im Inhalte und der Behandlung des Stoffes eng an Eulers beide Hauptwerke an: „*Mechanica, sive motus scientia, analytice exposita, 2 t. auctore* L. Eulero, Petrop. 1736 und *Theorica motus corporum solidorum seu rigidorum ex primis nostrae cognitionis principiis stabilita, auctore* L. Eulero, Rostochii et Gryphiswaldiae 1765[2]),

---

weiten Ausspinnung einer Theorie der Kräfte. Er vergleicht sie mit einer Reise in das Reich der Geister und „die sinnliche Welt bietet mir genug Gegenstände dar, die meiner Aufmerksamkeit wert sind, und auch unter den Gedichten vergnügen Hallers Alpen mich mehr, als Zacharias Schöpfung der Hölle", fügt er hinzu.

1) Dieser an sich berechtigte Standpunkt hat insbesondere in späterer Zeit aber doch Kästner gehindert, die Leistungen der neueren französischen Mathematik zu würdigen. So sah er in Lagranges *Mécanique analytique* wesentlich nur Rechnungen und urteilt gelegentlich der Erwähnung einer Übersetzung desselben durch A. Fr. Murhard: „Es ist gut, daß man das Buch so allgemeiner haben kann, aber bisher habe ich noch keinen einzigen Gebrauch von Lagrange's Rechnungen gesehen." (Brief an Scheibel 19. April 1797.)

2) Die Vorrede ist von J. W. G. Karsten.

von denen das erste die Bewegung des einzelnen Massenpunktes, das zweite die Bewegung fester Körper untersucht. Aber aus dem zweiten Buche bringt Kästner nur die ersten Ansätze, „indem die Lehren Eulers in der Allgemeinheit, in welcher er sie da vorträgt, noch weit von praktischen Anwendungen entfernt sind". Er schließt daher mit dem Satze von der Existenz der drei Hauptträgheitsaxen für jeden starren Körper, den J. A. v. Segner[1]) 1755 zuerst bewiesen hatte, nachdem Euler schon 1749 den Begriff der Hauptträgheitsachse aufgestellt hatte.

Kästners Hydrodynamik greift wesentlich auf die Arbeiten Joh. und Dan. Bernoullis über Hydraulik, weniger auf J. L. R. d'Alemberts *Traité de l'équilibre et du mouvement des fluides,* Paris 1744 zurück, indem es Kästner auch hier nicht sowohl um die alleinige Formulierung allgemeiner Prinzipien, als eine Durcharbeitung des Stoffes für die praktische Anwendbarkeit auf das Strömen von Wasser in Röhren und auf die Theorie der Wasserräder ankam. In der Vorrede steht wieder ein Passus, der wegen des Interesses, das er auch heute noch bietet, hier folgen möge: „Die mühsamen Rechnungen, welche oft müssen angestellt werden, sind eben nicht das, was ich für das Schwerste halte. Mehr Mühe und manchmal Mißvergnügen, haben mir die physischen Sätze verursacht, auf welche ich die Rechnungen gründen mußte. Zwar seitdem die ganze Mathematik in Algebra ist verwandelt worden, führt man sehr oft weitläuftige Rechnungen aus Formeln, die man ohne große Untersuchung annimmt, und wenn diese Formeln mit der Natur nicht übereinstimmen, so hat man nichts gethan, als sich die Zeit mit Rechnen vertrieben. Archimed versprach die Erde zu bewegen, aber einen Platz bedung er sich aus, auf dem er feste stehen könnte. Beobachtet man diese Vorsichtigkeit der Alten nicht, so zeigt man einem mathematischen Spötter (zum Glück giebt es derselben nicht viel) manchmal in den künstlichsten Integrationen, nur die ätherischen Myriaden aus Lucians wahrhafter Geschichte, Riesen, auf einem Schlachtfelde, das sich vom Monde bis zum Morgensterne ausbreitet, aber von Spinnen gewebt ist. Eine sichere und brauchbare Kenntniß der Natur giebt weder der Philosoph, der nicht rechnen kann, noch der Rechner, der nicht philosophiren will. Die Geschichte der Natur ist bey jenem ein Altweibergeschwätz, bey diesem eine Historie *à la* Voltaire."

---

1) In seinem Hallenser Antrittsprogramm: *A sereniss. ac potentiss. principe ac dom. d. Frederico II. rege Borussiae . . . . sibi indulgentissime collatum munus professoris Phys. et Mathem. primarii auspicaturus rationem praelectionum suarum in hac acad. frideric. exponit atque specimen theoriae turbinum subiungit* Joan. Andreas Segnerus . . . . Halae, *typis Gebauerianis* 4°, 40 S. 1755.

Über d'Alembert enthält die Hydrodynamik folgendes Urteil[1]): „Man würde d'Alemberts Werke sehr ungerecht den Vorwurf machen, daß es nur unbrauchbare Spitzfindigkeiten enthielte. Aber, diesem Vorwurfe vorzubauen, den Nutzen seiner Lehren selbst zu zeigen, wozu er so vorzüglich geschickt ist, zu dieser Herablassung gegen die Laien hätte ihm doch vielleicht selbst die Ehre der Wissenschaft Bewegungsgründe an die Hand geben können." Überhaupt ist interessant, weil mit M. Cantors Urteil stimmend, folgender Passus über d'Alembert in einem Brief an Scheibel (19. April 1797): „Allemahl wenn einerley Untersuchung von d'Alembert und von Euler angestellt ist, ziehe ich Euler vor. Sonst hatten die Franzosen das Verdienst schwere Untersuchungen durch Auseinandersetzung und Witz zu erleichtern, aber bey den genannten beyden ist mir oft eingefallen: Euler sey der gefällig unterhaltende belehrende Franzose und d'Alembert der schwerfällige Deutsche." —

Hiermit breche ich meinen Bericht über Kästner vorläufig ab, um nun am Schlusse diese Kapitels gerade so wie am Schlusse des vorherigen des Professors der angewandten Mathematik ex professo zu denken. Es war dies seit Tob. Mayers Tode und Lowitzs Fortgange 1764 Albrecht Ludwig Friedrich Meister. Geboren am 14. Mai 1724 zu Weickersheim im Hohenlohischen, studierte er seit 1743 (zunächst Jura) in Göttingen, 1747/49 in Leipzig, dann wieder in Göttingen, bis er sich 1753

---

1) Hydrodynamik, 2. Aufl. 1797, p. 676. — Für die Wertschätzung, die dieses Buch, sowie die Mechanik fanden, legen die folgenden Worte J. F. Lempes (1757—1801) und K. Chr. Langsdorfs (1757—1834) Zeugnis ab: „Herr Hofrath Kästner war der erste, welcher in deutscher Sprache Anfangsgründe der höheren Mechanik mit der gehörigen Gründlichkeit und Vollständigkeit, wie man damals schon längst von ihm gewohnt war, abfaßte, woraus sich die meisten brauchbaren Lehren dieser Wissenschaft erlernen lassen und wodurch man in den Stand gesetzt wird, Bücher der angewandten Mathematik zu gebrauchen" (J. F. Lempe, Lehrbuch der Maschinenlehre mit Rücksicht auf den Bergbau, 2 Bde, Leipzig 1795/97, p. 20) und „Kästners Anfangsgründe der höheren Mechanik, ein höchst wichtiges und in diesem Fache in der That unentbehrliches Werk. Wenn alle Kästnerischen Schriften einmal vernichtet werden sollten und nur die Erhaltung einer einzigen nach Stimmenmehrheit zugestanden würde, so würde ich bey diesem auf jeden Fall unersetzlichen Verlust doch den Anfangsgründen der höheren Mechanik meine Stimme geben" (K. Chr. Langsdorf, Handbuch der Maschinenlehre für Praktiker, Altenburg 1797) und ebenda über die „Hydrodynamik": „Daher hat auch dieses Werk das große Verdienst, zuerst den Geschmack an theoretischen hydrodynamischen Untersuchungen in Teutschland verbreitet und zu allgemeiner Überzeugung geführt zu haben, daß man ohne Theorie keine großen Fortschritte in dieser Wissenschaft machen, und ohne solche nicht einmahl Erfahrungen zu Vervollkommnung derselben sammeln und benutzen könne."

zur Magisterpromotion[1]) meldete. Seitdem dozierte er über alle Teile der Mathematik, bis er 1764 zum *prof. phil. extraord.* ernannt wesentlich die praktischen Teile behandelte, insbesondere seit er 1765 den Auftrag erhielt, auch über Kriegswissenschaften zu lesen. G. A. v. Münchhausen hatte nämlich die Idee, nach dem Muster der französischen Kriegsschulen in Göttingen an die Universität eine Kriegsakademie anzugliedern.[2]) Meister wurde für ein Jahr beurlaubt, um Studien in Holland und Frankreich zu machen, deren Ergebnis er in der „Abhandlung vom Kriegsunterrichte und Nachricht von den königlich französischen Kriegsschulen", Göttingen 1766 niederlegte. Aber die Idee Münchhausens erwies sich an der Universität nicht als durchführbar, besonders was die praktische Ausbildung anbetraf.

---

1) Seine diesbezüglichen *litterae petitoriae* sind in vielfacher Hinsicht interessant. Über sein mathematisches Studium heißt es: „*E tanto vero studiorum, quae philosophiae nomen complectitur, numero, mathematica imprimis eligenda mihi esse censebam, ea quidem, quae proximum vitae humanae usum respiciunt, tum quod natura ad illa promtior animo mihi videbar esse, tum quod istis non paucos amicorum meorum, patronos sibi conciliasse et reliquorum studiorum fructus maturasse sciebam. Quae ardua sunt in studio mathematico, quaeque ad eruditionem propius spectant, tunc temporis et remotiora a scopo meo esse, et nimiam juris studio moram afferre mihi videbantur.*" Hier folgt dann die schon zitierte Stelle über Joh. Friedr. Penther und dann heißt es weiter über seine ferneren Absichten: „*Accidit interea, cum post trium annorum absentiam, quibus praeceptoris domestici vices egeram, redux essem in hanc Academiam, ut discipulorum beati* Pentheri, *quos communia studia mihi familiares reddiderant, unus atque alter in illis studiis et artibus in quorum limine quasi constiterant, comitem me et monstratorem sibi esse juberent ulterius progessuris. Quorum cum ab illo inde tempore sensim augeretur numerus, neque meam qualemcumque operam aut disciplicere illis aut irritam esse animadverterem, tandem consilium cepi, unice huic rei vacandi et dum primas lineas scientiae aliis traderem, ad graviora interim et ardua magis animum conferendi.*"

Seine Promotionsschrift: *Instrumentum scenographicum, cuius ope datis obiecti ichnographia et orthographia invenire scenographiam . . . . exponit* A. L. Fr. Meister, Göttingae 1753. — Übrigens findet sich in den Akten über Meisters Examen folgendes Protokoll aus Joh. Math. Gesners Feder: „*Placuit illum* (i. e. Meisterum) *in conventum* (*praesentibus* v. Mosheimio, Heumanno, Hollmanno, Gesnero, Koehlero, Segnero) *vocari. Repetiit preces, et a me interrogatus de VII miraculis ita respondit, ut nec historiae ignarum se, neque infantem ostenderet. Litterariae historiae iuris imperitus videbatur, philosophiae non rudis, certe eorum quae in limine iurisprudentiae naturalis de lege, iure, obligatione disputari solent, de quibus disputabat* Hollmannus. Segneri *examen quodam casu ac discessu viri Ex^mi intercessum est. Iam cum post privatum colloquium indicasset mihi* Segnerus *iam ante, se non intercedere, quominus honor ordinis nostri* Meistero *conferretur, reliquis autem visus esset illo dignus, hoc ipsum illi significavi.*"

2) Über die ganze Angelegenheit gibt Aufklärung die Akte des Kuratoriums: „Akte betr. die von Prof. philos. A. L. F. Meister anzulegende *école militaire* 1765/66".

Trotzdem wurden die theoretischen Vorlesungen eingerichtet, die Meister bis zu seinem Tode 1788 gelesen hat und die auch später noch fortgesetzt wurden, anfänglich von dem Ingenieurhauptmann G. Chr. Müller; (noch 1820 findet sich im Lektionsverzeichnis die Anzeige eines Premier-Leutnants Cl. Fr. H. Stünkel über Kriegswissenschaften).

Im übrigen ist der Name Meister in der Literatur auch heute noch nicht ganz vergessen. In einer Abhandlung: *de genesi et affectationibus figurarum planarum*, Novi Com. soc. reg. Gott. 1 (1770) hat Meister zum erstenmal den Gedanken systematisch durchgeführt, den Flächeninhalt von Figuren je nach dem Umlaufssinn der Kontur positiv oder negativ zu rechnen;[1] in einer Abhandlung: *de solidis geometricis* studiert er die reziproken Polyeder.[2] Außerdem hat Meister von 1770 ab noch viele interessante Arbeiten insbesondere über Geodäsie usw. in den Commentationen der Sozietät publiziert, deren Mitglied er seit 1776 war,[3] nachdem er zuvor 1770 zum *prof. phil. ord.* befördert war. —

Über seine Lehrart und Einrichtung seiner Vorlesungen macht er bei Pütter 1, p. 302 folgende Angaben:

„Der Prof. Meister läßt sich bey seinen mathematischen Vorlesungen vornehmlich angelegen seyn, daß er 1) die Aufgaben der Feldmeßkunst, soviel es die Umstände und Neigungen seiner Zuhörer verstatten im Großen vornehmen könne; 2) daß er in allen practischen Disciplinen seine Zuhörer zugleich zu Verfertigung richtiger und wohlausgearbeiteter Risse, und in der Baukunst insbesondere auch zu eigener Erfindung anführe; Und da es 3) in der Praxis hauptsächlich auf gute Werkzeuge ankömmt; so zeiget er nicht nur bey aller Gelegenheit ihre vorzügliche Einrichtung, sondern auch die Art, wie sie verfertigt werden; welches letztere er desto leichter thun kann, da er die optischen und übrigen mathematischen Instrumente selbst zu machen weiß. Endlich 4) bemüht er sich auf alle Art und Weise, bey den praktischen Wissenschaften, den Fleiß seiner Zuhörer zugleich auf die theoretische Kenntnisse zu führen, und sie durch Gründe und Beispiele zu überführen, daß diese das einzige Mittel sind, es in jenen zu einiger Vollkommenheit zu bringen."

So hat Meister 25 Jahre neben Kästner erfolgreich für die Ausbreitung einer auf theoretischen Einsichten basierenden Kenntnis

1) Vgl. die Encyklopädie der math. Wissenschaften Bd. 3: Tl. 3. H. v. Mangoldt, Anwendung der Differential- und Integralrechnung auf Geometrie, p. 63 Fußn. 153: „Zum ersten Male dürften positive und negative Flächeninhalte in systematischer Weise unterschieden sein von L. F. Meister."

2) Vgl. M. Brückner, Vielecke und Vielflache, Leipzig 1900.

3) Seit 1765 war er außerordentliches Mitglied.

der praktischen Mathematik gewirkt. Kästner selbst hat dies wiederholt anerkannt, u. a. vielleicht am schönsten mit den Worten, die er als Dekan 1788 in den *Liber actorum decanalium* eintrug: . . . . . *docebat imprimis Geometriam practicam, Architecturam pacis et belli, tacticam militarem, quae cum pluribus illarum doctoribus artes sint, fere manuariae a* Meistero *ita tradebantur ut scientias tradi decet. Pollebat enim profundiore cognitione analyseos et eorum omnium quae theoria et eruditio, ad practicas illas quas vulgo vocant disciplinas, firmandas, augendas, ornandas conferre possunt. Itaque disci ab illo poterat elegantior etiam architectura cuius exempla in itinere gallico viderat; . . . . . . Illum autem virum praeter ingenium naturae dotibus et magna eruditione dives, commendabant, morum probitas, insignis modestia, et in eo fere . . . . . quod multo minus quam decebat, sibi tribueret. Ita nemini gravis erat, bonis moribus gratus, paucis contentus, de quo nihil collegae dolent nisi mortem.*[1]) —

Ich könnte an dieser Stelle nun vielleicht auch der sonstigen Dozenten gedenken, die in den 60er und 70er Jahren in Göttingen mit mehr oder minder Erfolg, insbesondere immer wieder die praktischen Teile der Mathematik zum Vortrag brachten. Aber ihre Aufzählung mag unterbleiben, weil sie für das Bild nicht wesentlich sind; nur eine Detailschilderung dürfte sie nicht übergehen. Einige der bekannteren Namen sind neben dem Architekten Joh. Michael Müller, Matth. Butschany, Joh. Paul Eberhard (1723—1795) und die beiden Brüder Heinr. und H. Jul. Oppermann.

Damit sei die Charakterisierung der Mathematik der Aufklärung in Göttingen beschlossen. Die Tendenz der Zeit ist unverkennbar, ihr Stichwort: brauchbare Mathematik, gegründet auf theoretische Einsichten. Aber wie die Outrierung eines jeden Standpunkts zur Einseitigkeit führt, so auch hier. Schließlich aber ist die Mathematik doch auch noch etwas anderes, als nur ein Mittel zum Zweck: so begann man von verschiedenen Seiten zu empfinden, besonders als in den letzten beiden Jahrzehnten des 18. Jahrhunderts eine Geistesrichtung die Aufklärung ablöste, die eine ganz andere Schätzung der bisherigen Werte anbahnte und der Individualität und dem individuellen Empfinden einen früher nicht gekannten Geltungsbereich gab. Das folgende Kapitel hat zu zeigen, wie sich Göttingens Mathematiker zu dieser Mathematik des Neuhumanismus stellten.

---

1) Die obige kurze Schilderung von Meisters Tätigkeit hätte noch durch manche Züge belebt werden können, die von den Akten des Kuratoriums an die Hand gegeben werden. (Vgl. „Personalakte Meister" des Kuratorialarchivs.)

Viertes Kapitel.

Die Mathematik des Neuhumanismus in Göttingen. A. G. Kästner, C. F. Seyffer u. B. F. Thibaut.

Die Aufklärung, ihrem inneren Wesen nach ein gutes Stück rationalistisch, war allmählich in Popularphilosophie und Philanthropinimus ausgeartet: „Die Religion wurde zu gemeinem Moralismus, das Christentum zum Eudämonismus, die Theologie zum Naturalismus, die Philosophie zum Synkretismus und Materialismus, die Weltweisheit zur Erdweisheit, die Wissenschaft zur Plusmacherei erniedrigt.“[1]) Die Reaktion ist der Neuhumanismus, dessen erste Spuren man weiter zurückverfolgen kann — (ein Symptom ist der die Individualität und das individuelle Gefühl wiederbetonende, von J. Kant freudig begrüßte *Émile* von J. J. Rousseau (1712—1778)) —, dessen allgemeinere Wirkung aber einsetzte mit der Wirkung von J. Kants „Kritik der reinen Vernunft“ (1781). Fr. J. Niethammer[2]) sagt: „Ein anderer Geist ist mit der Wiederauferweckung des echten philosophischen Denkens unter uns erschienen. Dieselbe merkwürdige Reform, welche das Ideale wieder zu der Ehre, Realität zu sein, hervorgerufen hat, ist in dem ganzen Umkreis unserer Bildung, in Wissenschaft und Kunst, in Philosophie und Religion, in allen Zweigen des Thuns und Lebens in unzweideutigen Erscheinungen sichtbar; die Überzeugung von der Schädlichkeit nicht nur, sondern selbst von der gänzlichen Untauglichkeit jenes plumpen Realismus ist nicht mehr bloße unsichere Meinung dieses oder jenen einzelnen: die Idealität der Wahrheit und die Wahrheit des Idealen, von aller Vernunft als Wahrheit Geforderten und Vorausgesetzten, wird immer allgemeiner und lauter anerkannt, die Stimme derer, die jener Überzeugung höhnen, immer heimlicher und schwächer. Mit einem Wort, ein besserer Geist, der Geist des Humanismus, hat sich wieder aufgerichtet.“ War das Bildungsideal des Rationalismus Zucht des Geistes, das der Aufklärung praktischer Gebrauch des Verstandes, so wurde das Humanitätsideal „die rein menschliche Bildung und Erhöhung aller Geistes- und Gemüthskräfte zu einer erhöhten Harmonie des innern und äußern Menschen“. „Hatte die Gelehrtenbildung das Wissen als Wissen und nur des Wissens willen zu ihrer Berufsaufgabe und hatte sie sich auf diese einzige Thätigkeit beschränkt, so behandelt die Humanitätsbildung das Wissen nur als Bildungsmittel und

---

1) Fr. J. Niethammer, Der Streit des Philanthropinismus und Humanismus Jena 1808.

2) ebenda, p. 33.

diese Thätigkeit nicht als einzige, sondern nur als eine von den mehreren, die sie zu üben hat.“

Daß hierbei nun der Philologie und Altertumskunde eine so bedeutsame Rolle zufiel, ist mehr aus äußeren Gründen, als aus inneren Gründen zu erklären; weil reaktionär gegen den Utilitarismus wurde die Bewegung auch reaktionär gegen die Mathematik. Sie lehnte sich lieber an die neuen Wissenschaften an, insbesondere die Altertumskunde, die gerade F. A. Wolf (1759—1824) zu einer solchen erhob, wobei er „von der Erkenntnis der altertümlichen Menschheit auf wahre Menschenkenntnis und von dieser auf wahre Menschenbildung ausging“.[1]) In der Mathematik sah man günstigenfalls nur eine Schule des Denkens, meinte, sie beuge der Zerstreuung usw. vor, aber glaubte, daß andere Seelenkräfte z. B. die Phantasie und der Geschmack vollständig „einschlafen“ müßten. Es ist zu bedauern, daß es in dieser Zeit, wo von so vielen der Mathematik unkundigen Leuten dieser die heftigsten Vorwürfe gemacht wurden, in Deutschland einen wahrhaft großen Mathematiker, der zugleich den Geist der neuen Zeit verstand und eingreifend wirken wollte, nicht gab. Wohl ahnte man in Deutschland, daß die Mathematik mehr sei als ein Zuchtmittel des Verstandes und eine Wünschelrute in der Hand des Praktikers. Man liest es aus den Werken mancher Mathematiker jener Zeit, insbesondere der von C. Fr. Hindenburg (1741—1808) begründeten kombinatorischen Schule heraus, daß die Mathematiker die Ahnung einer neuen Epoche der Mathematik durchzog. Und dazu kam, daß man seit 1789 in Frankreich eine Entwicklung sah, welche zu den größten Hoffnungen berechtigte. Ein junger Göttinger Dozent Fr. W. A. Murhard[2]) fällte über J. L. Lagranges *Mécanique analytique* das Urteil: „Das vollendete Werk eines unter unsterblichen Verdiensten um seine Wissenschaft grau gewordenen Mathematikers. — Eine neue Epoche hebt mit diesem Werke in der Geschichte der Mechanik an und neue Bahnen sind durch dasselbe den Geometern zur Vervollkommnung ihrer Theorie und Praxis eröffnet.“

Aber die Entwicklung in Frankreich war eine andere, als daß man sie ohne weiteres auf Deutschland hätte übertragen und so der Mathematik eine gleichberechtigte Stellung neben den übrigen Wissenschaften hätte sichern können. In Frankreich hatte J. J. Rousseaus *Contrat social* mehr gewirkt als sein *Émile*, es folgte hier auf die Aufklärung die politische

---

1) J. F. J. Arnoldt, Fr. Aug. Wolf in seinem Verhältnisse zum Schulwesen und zur Pädagogik. 2 Bde., Braunschweig 1861/62.

2) Vgl. *Bibliotheca mathematica auctore* Frid. Guil. Aug. Murhard, Vol. 3, Lips. 1803, p. 32.

Revolution, die die praktischen Wissenschaften in ihrer Wertschätzung erhielt und im weiteren Verlaufe zu einer Vertiefung derselben hinführte; in Deutschland folgte auf die Aufklärung die Geistesrevolution, in der man sich von den praktischen Wissenschaften absichtlich abwandte und sich nicht scheute, die Mathematik mit fruchtlosen philosophischen Spekulationen zu verquicken. Selbst die Kombinatorik, die Disziplin, an deren Ausbau zum erstenmal in Deutschland eine ganze Schule selbständig tätiger Mathematiker arbeitete, blieb von diesen Spekulationen nicht ganz frei und, als J. B. J. Delambre (1749—1822) 1810 seinen von Napoleon I geforderten Bericht über den Fortschritt der Wissenschaften seit 1789 schrieb, mußte er bei Erwähnung der Kombinatorik in Deutschland den Zusatz machen[1]): „*L'analyse combinatoire continue d'occuper les géomètres allemands; mais elle n'a acquis aucune faveur en France, parceque ses usages sont trop bornées et ne paraissent pas à étendre aux branches qu'il importe les plus le perfectionner.*" Diese wichtigen Zweige waren die Teile der mathematischen Physik, an denen damals in Frankreich eifrig gearbeitet wurde.

So konnte es denn den deutschen Mathematikern erscheinen, als sei für die Weiterentwicklung der Mathematik ein Ruhepunkt eingetreten und als müsse zunächst die Zeit der Reflexion und Sammlung folgen. In etwas späterer Zeit hat dies B. F. Thibaut in Göttingen so ausgesprochen[2]): „Es scheint in der Bearbeitung der mathematischen Wissenschaften allenthalben ein Ruhepunkt deutlich hervorzutreten, und Newtons Zeitalter sich zu seinem Ende zu neigen. In der That die Prinzipien, die Methoden, wodurch dieser einzige Geist Schöpfer der höheren Analysis und ihrer weitverbreiteten Anwendungen geworden ist, während eines Jahrhunderts dem unermüdlichen Fleiße einer großen Reihe tiefsinniger Geister anvertraut und von ihnen nach allen Seiten mit bewunderungswürdigem Scharfsinn ausgebildet, mußten wohl endlich zu einem solchen Zustande der Erschöpfung gelangen. Mit der Größe des Erwerbs hat seine Leichtigkeit abgenommen; das Bedürfnis, die vielfachen, einzeln gewonnen Schätze zu übersehen, zu ordnen, wird immer fühlbarer und nur aus der vollendeten Zusammenfassung des Alten scheint ein Zukünftiges hervortreten zu können. Wie aus der Periode der lieblichen Jugend, wo sich frey und freudig ohne Bewußtsein die Kräfte entwickeln, muß die Wissenschaft endlich den Über-

1) *Rapport historique sur les progrès des sciences mathématiques depuis 1789, et sur leur état actuel, présenté à sa Majesté l'Empereur et Roi, en son Conseil d'état, le 6 février 1808, par la classe des Sciences physiques et mathématiques de l'Institut, conformément à l'arresté du Gouvernement du 13 Ventose an X; rédigé par* M. Delambre, Paris 1810.

2) Göttinger gelehrte Anzeigen 1805, pg. 535.

gang in das männliche Alter machen, und durch strenge Reflexion über sich selbst geleitet, den eigenen Geist ermessend zu einer neuen Stufe der Entwicklung fortgehen." —

Diese Resignation aber erstreckte sich noch weiter über das engere Gebiet der Mathematik hinaus. So nahmen die Mathematiker kein sonderliches Interesse an zwei Problemen, deren Erledigung ihre eifrigste Mitarbeit erfordert hätte. Der Neuhumanismus stellte das von dem Philanthropinismus in Angriff genommene Problem der Jugendbildung von neuem; und wenn auch das Problem erst im 19. Jahrhundert in der Neuorganisation des Gymnasialunterrichts seine erste Erledigung fand, so wurden doch in der hier in Frage stehenden Periode vor 1800 die Männer gebildet, welche an der späteren Organisation tätigen Anteil nehmen sollten. Aber die Mathematik dieser Zeit hat keine Schulmänner gebildet, die wie Fr. Niethammer, Fr. Thiersch (1784—1860), F. A. Wolf den klassisch-historischen Unterricht organisierten, dem mathematischen Unterricht auf den Schulen feste Formen gaben. Das andere ist, daß die Mathematik auch ihre Verbindung mit der Praxis löste. Das praktische Leben stellte Anforderungen an technische und physikalische Fähigkeiten, die man bei der bisherigen Organisation der Universitäten sich nicht auf ihnen erwerben konnte. So machte sich bei den Praktikern die Tendenz geltend, ihre Ausbildung auf speziellen Fachschulen zu suchen[1]), die Theoretiker auf den Universitäten aber verstanden nicht, sich mit diesen neu hervortretenden Problemen auseinanderzusetzen: das bei ihnen Vorhandene in angemessener Weise umgestaltend mit jenen neuen Bildungsbestrebungen Fühlung zu halten, womit denn ein großer Teil der bisher notwendigen Einrichtungen auf der Universität überflüssig wurde. Wohl blieben sie vorläufig noch so ohne neuen Inhalt bestehen, aber allmählich mußten sie sich doch ablösen. Das 19. Jahrhundert hat diesen Prozeß der anwachsenden Entfremdung zwischen Theorie und Praxis in seinen schärfsten Formen gesehen, die Kerne dieser Entwicklung liegen in der hier bezeichneten Epoche des Neuhumanismus.

Ich schließe hiermit diese etwas rasch hingeworfene Skizze über die Stellung der Mathematik in der Periode des Neuhumanismus und wende mich nun speziell den Göttinger Verhältnissen zu, wo sich die obigen allgemeinen Angaben etwas mehr beleben werden. Dabei ist zu bedenken, daß die Charakterisierung zeitlich keine ganz vollständige ist, da sie noch über 1800 in die beiden ersten Jahrzehnte des 19. Jahrhunderts hätte fortgesetzt werden müssen. Aber Kästners Tod bezeichnet eine erste Phase. —

Die erste Frage muß sein: Wie stellte sich A. G. Kästner zu dieser

1) So wurde 1799 die Berliner Bauakademie gegründet.

Entwicklung? Kästners Blütezeit war mit dem Abschluß der Aufklärung vorüber, selbst 60jährig hat er den ganzen Inhalt von Kants Kritik der reinen Vernunft und das Herannahen einer neuen Epoche in der Mathematik nicht mehr aufgefaßt: „Als ihn jemand fragte, ob er kantische Philosophie studiere, erwiderte er, er habe zwölf Sprachen gelernt, er wolle in seinem Alter nicht noch die dreizehnte lernen.“[1]) Gleichwohl ist er nicht teilnahmslos geblieben; noch zu manchen Fragen über den Charakter der Mathematik, vorzüglich der Geometrie, wie sie besonders durch Kants Kritik aktuell wurden, hat er Stellung genommen. Z. B. schrieb er über „die Axiome der Geometrie“, ein anderer Aufsatz heißt: „Was heißt in Euklids Geometrie möglich“[2]); auch war er Mitarbeiter von Hindenburgs „Magazin für reine und angewandte Mathematik“, der ersten ausschließlich mathematisch-physikalischen Zeitschrift Deutschlands. Aber das Alter Kästners brachte es doch mit sich, daß Kästner nicht mehr der Mann war, das pädagogische Problem des Neuhumanismus aufzufassen, wie gerne er auch früher gerade immer mit Vorliebe auf das Problem des Jugendunterrichts eingegangen war. „Ob die Mathematik zur Humanität beyträgt“, im Hannov. Magazin 10 (1772), p. 1462 ist der Titel einer solchen Schrift, in der er gegen den outrierten Philanthropinismus zu Felde zieht und für die vernachlässigte und nicht geachtete Strenge in der Mathematik eine Lanze bricht. „Arbeitsamkeit und die, soviel ihm seine Umstände verstatten, oft noch etwas mehr als sie eigentlich verstatten, ohne Eigennutz für das das gemeine Beste gehört mit zu dem Charakter, den die Mathematik ihren Freunden gibt. Das mögen einige von den Gründen gewesen seyn, warum die Mathematik als ein wichtiges Stück einer vernünftigen Erziehung gar sehr von ein paar Leuten empfohlen worden, die ganz andere Erziehungsproben abgelegt haben, als unsere neueren Pädagogen, von Melanchthon und Gesner.“ Auch wurde er im Alter immer zurückhaltender und äußerte seine Bedenken und Meinungen nur in Briefen an seine Freunde. Einen Streit, wie er ihn in den 60er und 70er Jahren mit A. L. Schlözer (1735—1809) hatte und der entstanden war aus der Kritik, die Kästner über Schlözers Anspruch in den russischen Annalen: „Die Aufklärung der Nation erfolge durch die Mathematik nicht unmittelbar“ in einer Vorlesung in der deutschen Gesellschaft: „Über den Wert der Mathematik außerhalb der Mathematik“ aussprach, hat er später nie wieder hervorgerufen.[3]) —

1) Letztes Wort über Göttingen und seine Lehrer, mitunter wird ein Wörtchen raisonniert, Leipzig 1791 (anonym), p. 63. Vgl. auch den Brief A. G. Kästners an J. Kant in J. Kants Briefwechsel, Berlin 1900, Bd. 2, pg. 229.

2) In Joh. Aug. Eberhards philosophischem Magazin 2 (1789).

3) Dieser Streit ist offenbar parteiisch dargestellt in „A. L. Schlözers öffent-

Kästner beschränkte sich daher darauf, seine Vorlesungen und schriftstellerische Tätigkeit in alter Weise fortzusetzen. Seine Vorlesungen wurden, wenn auch weniger als früher, immer noch gerne besucht, und er hat sich öfters in Briefen an A. v. Gehren und Ephr. Scheirel zufrieden über den Besuch ausgesprochen.[1]) Seine schriftstellerische Tätigkeit

---

liches und Privatleben aus Orginalurkunden, mit wörtlicher Beifügung mehrerer dieser letzteren vollständig beschrieben von dessen ältestem Sohne Chr. v. Schlözer", Leipzig 1828. Jedenfalls trug er Kästner folgende Notiz von Schlözer in den *liber decanorum* ein: „*Obiit quoque d.* 20 *Jun.* Kaestner *vir multiplicis eruditionis, scriptisque mathematicis clarissimus; verum bonis omnibus odiosus ob criminationes continuas, quibus ab anno 1761 usque ad ultimum vitae terminum, jam octogenarius, viros vitae integros, atque ipsos adeo collegas gravissimos, legum nostrarum academicarum immemor insectatus est. Iocari se dictitabat homo, facie habitu moribusque ipse jocis opportunissimus, sed jocandi genus elegerat illiberale, petulcum, subinde flagitiosum ac obscoenum. Quum nullum, quantum equidem scio, poenitentiae signum dederit, ad quam ei tantum spatii natura largita est: haec huc in acta, referre meo collegarumque aliquot meorum nomine volui, debui. Legat posteritas, si qua erit, Autobiographiae meae sectionem XI atque crimine ab uno discat reliqua omnia.*" Hiermit vgl. man, wie unkorrekt der Sohn Schlözers in dem genannten Buche (pg. 162) die Stelle wiedergegeben hat.

Als interessant erwähne ich auch des Sohnes Urteil über die Mathematik: „Überhaupt kann nur ein Schwachkopf behaupten, daß für angehende Bildung eines Volkes das Studium wenigstens der höheren Mathematik irgend einen bedeutenden Vorteil gewähre. Denn die ganze Mathematik ist ja eine bloße Größen- und Formenlehre und der Begriffe und des Denkens völlig entbehrend, für den, welcher sie nicht wie ein Leibnitz, Newton, Hindenburg usw. zu behandeln und zu vervollkommnen weiß, wenigstens für den großen Haufen der gewöhnlichen Mathematiker, ein bloßes mechanisches Geschäft, dessen Resultate, wie schon Leibnitzens Rechenmaschine, wie noch mehr die neuesten englischen Erfindungen lehren, durch todte Maschinen ersetzt werden können." p. 178.

1) Ein Schüler Kästners in dieser Zeit war auch Joh. Fr. Pfaff (1765—1825). Vgl. hierüber „Sammlung von Briefen gewechselt zwischen Johann Friedrich Pfaff und Herzog Carl von Württemberg, F. Bouterwek, A. v. Humboldt, A. G. Kästner, und anderen". Herausgegeben von Carl Pfaff, Leipzig 1853. Hier heißt es (pg. 59) in einem Briefe Pfaffs an den Herzog (1786): „Kästner unterrichtet mich besonders durch seinen geometrisch-philosophischen Geist, durch seinen zwar schweren, aber bestimmten und ordnungsvollen Vortrag, durch eine gewisse Art des Geschmacks, dessen Gewand er zuerst über manche tiefsinnige Wahrheiten seiner Wissenschaft geworfen hat, durch seine ausgebreitete Literatur, welche ihn, wenn ich so sagen darf, in den Stand setzt, die Stelle einer Bibliothek zu vertreten. Die hiesige academische Bibliothek ist auch in der Mathematik, besonders in der Astronomie, vorzüglich; und außerdem sind hier noch andere Hülfsmittel, eine mit ausgesuchten Werkzeugen versehene Sternwarte, eine Sammlung von Modellen nützlicher Maschinen u. dgl. vorhanden, die ich, so wie die übrigen hier befindlichen Lehrer, besonders den in der praktischen Mathematik und ihern Anwendungen auf die Kriegskunst geschickten und berühmten Hofrath Meister benutzen werde."

hat in dieser Periode eher noch zu- als abgenommen. Insbesondere richtete er sie auf einen ganz neuen Gegenstand. Es lag von jeher in Kätners Natur, daß er ein großer Liebhaber der mathematischen Literatur war. Schon oben wurde gelegentlich erwähnt, daß er im Laufe der Zeit eine der reichhaltigsten mathematischen Privatbibliotheken zusammengebracht hatte. Diese Bibliothek gab ihm den Stoff, nach den verschiedensten Richtungen literarisch tätig zu sein. Schon früh hatte er begonnen seltene Drucke seiner Bibliothek in besonderen Schriften zu beschreiben z. B. 1750 in einer *Epistula ad Cardinalem* Quirinum den ersten Druck von Euklids Elementen: *Geometriae* Euclidis *primam quae post inventam Typographiam prodiit editionem breviter descripsit* Abr. Gotth. Kästner Lips. 1750. Seine Lehrbücher und Abhandlungen sind oft von den wertvollsten historischen Notizen durchzogen. Aber erst als er seine „Anfangsgründe" mit ihren verschiedenen Ergänzungen abgeschlossen waren, begann er einer vorwiegend encyklopädischen Tätigkeit zuzuneigen. So unterstützte er z. B. eifrig die „Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften, ihrer Geschichte und Literatur" von G. E. Rosenthal (1745—1814), Gotha 1790 ff., zu der er die Vorrede schrieb und ebenso G. S. Klügels „Encyklopädie oder zusammenhängender Vortrag der gemeinnützigsten Kenntnisse", Berlin 1782 ff. Und es ist schon in der Einleitung gesagt, daß er noch 1796 schon 76 jährig seine „Geschichte der Mathematik" schrieb, von der er selber sagt, daß sie anders ausgefallen wäre, wenn er sie in den 70 er Jahren begonnen hätte.[1]) Die Korrespondenz mit J. Eph. Scheibel gibt gerade hier in die Entstehungsgeschichte dieses letzten Werkes Kästners interessanten Ein blick. —

Aus diesem seinem Abschließen gegen das Neue, das eine retrospektive Tätigkeit wohl immer mit sich bringt, ist auch Kästners Urteil über die neue französische Entwicklung der Mathematik zu verstehen. Über sie hat er gelegentlich in den Rezensionen[2]) der Göttinger gelehrten Anzeigen Andeutungen gemacht, deutlicher aber spricht er sich über sie in seinen

1) Kästner wurde zur Abfassung aufgefordert von Joh. Gottf. Eichhorn, in dessen „allgemeiner Geschichte der Künste und Wissenschaften bis zu Ende des 18. Jahrhunderts" sie als 7. Abteilung erschien. Übrigens geht sie in 4 Bänden nur bis auf Cartesius' Zeiten.

2) Solche hat Kästner im Laufe der Zeit viel geliefert (auch in Chr. Fr. Nicolais (1733—1811) allgemeiner deutscher Bibliothek). Ein genaues Studium aller dieser Kritiken ist geeignet, ein Gesamtbild der Mathematik des 18. Jahrhunderts und Kästners Verhältnis zu ihr zu geben. Die Göttinger Bibliothek besitzt ein Exemplar der gelehrten Anzeigen, in dem der Rezensent jedesmal der Kritik beigeschrieben ist. Für die spätere Zeit hat Ferd. Wüstenfeld die Namen der Rezensenten usw. publiziert, Gött. Nachr. 1887 (Nachtrag).

Briefen an Ephr. Shceibel aus den 90er Jahren aus.[1]) Ihm war das Hervorstechendste bei der französischen Analysis die Ausbildung des Kalküls, durch die er den Gedankeninhalt zurückgedrängt wähnte. So urteilt er über Laplace: „Daß der viel Einsichten hat und ein großer Calculator ist, leidet keinen Zweifel, aber bestimmte Ausdrücke, Deutlichkeit und überzeugender Vortrag sind nicht den französ. Calculatoren, die nie die Geduld haben, anfangs sich nach den griechischen Geometern zu bilden." Dieser Wunsch, in den Grundlagen klar zu sehen, veranlaßt ihn dann auch zu folgendem Urteil über J. L. Lagranges *Théorie des fonctions analytiques*: „Lagrange will in seiner *Théorie des fonctions* die Rechnung des Unendlichen aus offenbahrern Sätzen herleiten als bisher geschehen ist und fängt damit an: jede Funktion von x lasse sich, wenn x sich in $x + i$ verwandelt, durch die Reihe *functio* $x + pi + qi^2 + ri^3 + \cdots$ ausdrücken, wo p, q, $r \cdots$ Funktionen von x sind. Das ist doch wohl niemandem deutlich, der nicht schon in Rechnung des Unendlichen geübt ist. Ferner wenn die Reihe nicht abbricht, nur für eine konvergirende Reihe beynahe wahr, ganz unbrauchbar, wenn die Reihe divergirt. Also ist es gar nicht geometrische Deutlichkeit, Schärfe und Sicherheit, die Rechnung des Unendlichen auf diese Voraussetzung, die so viel Erläuterungen, Bestimmungen und Berichtigungen braucht, zu gründen."[2])

Wir werden heute dies Urteil nicht ungerechtfertigt finden, ungerechtfertigt ist die einseitige Betonung einer strengen Grundlegung und die geringe Einschätzung des wirklich Neuen, welches das Werk enthält. Es kommt auch hier ebenso wie in seinem Urteil über Lagranges *Mécanique analytique* deutlich zum Ausdruck, daß Kästner wohl ein überaus kritischer, aber kein schöpferischer Kopf war, oder wie es „das letzte Wort über Göttingen" ausdrückt: „Er ist kein feuriges Genie mit der ungeheuren Denkkraft eines Eulers, das sich an einem Gegenstande, den es inbrünstig faßt, einmal erschöpfen kann und nachher auch wohl eine Leere, ein Unbehagen fühlt, das daher rührt, daß es sich jetzt seiner Kraft nicht bewußt ist. In solch einem Zustande fühlt sich Kästner nie. Er ist kein solches Genie, aber dafür der Erste in der Reihe der offenen Köpfe. Sein Verstand hat alles gefaßt, was er ihm dargeboten, er hat sich nie beschränkt, nie das Unbehagen gefühlt, mit etwas nicht zurecht kommen zu können, es ist ihm immer, um etwas mit dem Verstande zu bewältigen, noch so viel Kraft

---

1) Auch in Briefen an W. Olbers und Joh. Fr. Pfaff; Vgl. für letzteren den zitierten (Fußn. 1, pg. 84) Briefwechsel, für ersteren den Nachlaß W. Olbers auf der Seefahrtsschule in Bremen.

2) Brief an E. Scheibel vom 1. April 1799.

übrig geblieben, als nötig ist, um im Bewußtsein derselben sich geschmeichelt, sich froh zu fühlen" (p. 64).[1])

A. G. Kästner starb 80jährig am 20. Juli 1800. Sein Hingehen hat in der Mathematik keine fühlbare Lücke hinterlassen, wie der Tod Lichtenbergs ein Jahr früher in der Physik. Nur wenige Freunde fühlten, daß hier „ein ungewöhnlicher Mann" gestorben war. Die Jugend hatte ihn nicht mehr zu würdigen gewußt, er galt ihr als Repräsentant einer vergangenen und überwundenen Zeit.[2]) Ihre Lehrmeister wurden die Klügel, Hindenburg und Pfaff. Darum aber sammelte sich doch in Göttingen gerade in den 90er Jahren ein großer Kreis jüngerer Mathematiker: Sie benutzten Kästners und der Universität Bibliothek. —

Voran steht Carl Felix Seyffer, der 1762 zu Bixfeld in Württemberg geboren seit 1789 außerordentlicher Professor in Göttingen war und zugleich die Leitung der Sternwarte übernahm. Kästner erhielt den Auftrag, ihn zu bilden, „aber er war schon gebildet genug, nämlich eingebildet" sagt er von ihm. Ein andermal hat er das Urteil: „Kurz Seyffer ist nichts weiter als ein besoldeter Ignorant und Müßiggänger, den man bald wieder los wäre."[3]) Ich vermag nicht zu sagen, wie weit dies Urteil

1) Es mag noch folgende Stelle über Kästner aus dem interessanten Buch hier Platz finden:

„Er hat die glücklichste Temperatur zum Gelehrten. Er hat ganz das *sang sans aigreurs* und die *humeurs sans venin,* die du Bos zu einem guten Denker fodert. Hierin, und in seinen andern Umständen, liegt vieles, was seinen Charakter und seine Art zu denken erklärt. Er hat weder die Podagra wie Leibniz, noch Augenkrankheiten wie Euler, noch Magenweh oder die Steinplage wie d'Alembert, noch braucht er einer schönen feurigen Königin in den Morgenstunden Vorlesungen zu halten, wie der arme Cartesius, der dabei sein Leben mit allen seinen $x - y$ elendiglich aufgab. Die Schmerzen des Geistes, die oft aus einem Gedanken des göttlichen Pascal hervorblicken, hat Kästner nie gefühlt."

2) Dies kommt äußerlich zum Ausdruck in der geringen Anteilnahme der Jugend an den Jubiläumsfeiern Kästners, die in die 90er resp. das Ende der 80er Jahre fallen. Ja des 50jährigen Professorenjubiläums Kästners 1796 war sogar von der Fakultät erst nachträglich gedacht worden.

3) „Er bleibt aber nach dem Gesetze der Trägheit" setzt Kästner hinzu und schließt:

„Daß er acht Jahre Professor hieß
Und nie sich als Gelehrter wies
Ist seiner Ohnmacht zu verzeihn,
Nur was auch Menschenliebe spricht
So mußte wohl die Ohnmacht nicht
Acht lange Jahr besoldet sein."

C. F. Gauss stand mit Seyffer später in Göttingen in Verbindung. Seyffer ging 1804 als Sternwartendirektor nach München. — Eine Dissertation, die unter

Kästners gerechtfertigt ist. Man ist geneigt, in ihm etwas den Haß durchblicken zu sehen, den Kästner gegen die Jugend überhaupt hatte, welche nicht mehr bei dem Professor in den üblichen Kollegs eine solide Grundlage für ihre fernere mathematische Ausbildung suchte, sondern auf den Universitäten von dem unruhigen, spekulativen Geist der Zeit angeregt, mehr durch glänzende Aperçus ihre Originalität bezeugen wollte. Und Seyffer war nicht dazu gemacht, in angestrengter Tätigkeit irgend einen mathematischen Gegenstand erschöpfend zu behandeln. Darum hatte er aber doch Verstand und Geist, wie Kästner übersah.[1])

Einem anderen Professor sprach er diese Eigenschaften nicht ab, aber hier tadelte er seine Neigung zu einer hyperkritischen Philosophie. Joh. Chr. Daniel Wildt wurde geradezu von Kästner gegen Seyffer unterstützt[2]),

---

seiner Leitung zustande kam, ist P. Chr. Voit, *Percursio conatuum demonstrandi parallelarum theoriam de iisque iudicium,* 1802. Eine Rezension von Seyffer in den Göttinger gelehrten Anzeigen, 1802.

1) Die Akten des Kuratorialarchivs enthalten auch hier viel Material über das Verhältnis Kästners und Seyffers.

2) Ich habe hier eine Schrift im Auge, die sich in Kopie in der „Personalakte Kästner“ des Kuratorialarchivs befindet: „Etwas das ich mündlich vortragen könnte, setze ich auf, sowohl dadurch, was ich lehre keine Zeit zu entziehen, als auch weil es mit mehr Bedacht kann gelesen und freyer überlegt werden; auch weil ich mich dazu durch meine Unterschrift bekenne.

Es betrifft diejenigen Herren, die etwa diesen Januar (1799) Physik hören wollen und meine Gedanken dabey einiger Aufmerksamkeit werth finden. Daß ich durch Aufsetzung meiner Gedanken nicht außer meine Schranken schreite wird mich rechtfertigen, da ich Professor der Mathematik und Physik bin. Ich habe die letztere hier viele Jahre gelehrt. Da mir die Mathematik eine Menge eigentlich mir angenehmerer Beschäftigungen darboth, ich auch sonst durch Ausarbeiten von Schriften, Recensionen u. dgl. viele Zeit zubringen mußte, so überließ ich die Physik gern anfangs Erxleben, dann Lichtenberg. Jezo ist Professor Wildt Physik zu lehren erböthig. Er besitzet ein ansehnliche Bücher-Sammlung, viel und zum Theil kostbare Instrumente, weiß Werkzeuge zu beurtheilen und zu verbessern, da er mit mechanischen Arbeiten umzugehen geübt ist. Noch ist ihm von kgl. Regierung der Gebrauch der von Lichtenberg hinterlassenen Instrumente verstattet. So glaube ich, er könnte Lehrbegierigen nützlich seyn.

Noch hat auch Prof. Seyffer Physik angekündigt. Von dem muß ich gerade das Gegentheil sagen, er hat sich niemals geschickt in physischen Versuchen gezeiget, und es wird auch alles auf Seyde, der sein Gehülfe wäre, ankommen, und da der Aufwand, den er liebt, ganz andere Gegenstände hat, als Hülfsmittel der Gelehrsamkeit, so hat er bei dem Unternehmen lediglich auf die von Lichtenberg hinterlassenen Instrumente gerechnet, auch daß er sie brauchen würde, am schwarzen Brett angekündigt, ehe er um die Erlaubniß dazu gehörig angesuchet, und diese Erlaubniß ist bisher ihm abgeschlagen worden. Seine bisherige Art zu lehren, die er *sua methodo* ankündiget, ist Hefte zu dictieren in der Mathe-

aber er konnte sich nicht entschließen, Vorlesungen zu halten, so daß man ihn später in Göttingen fallen ließ, obwohl Schlözer 1793 von ihm sagte: „Er kömmt mir als ein emporstrebendes Genie vor, das um so mehr unsere Achtung und Wertung verdient, weil es inländisches Produkt ist,“[1]) und 1797 Gottl. Heyne nach Hannover berichtet: „Wir haben hier einen jungen Mann von großer Fähigkeit, vielem Scharfsinn und mathematischen Kopf, wofür ihn Kästner und Lichtenberg erklären, Wildt, Hannoveraner.“ Würde er bei der Anstellung übergangen, „so würde ein trefflicher Kopf vielleicht ganz um seine Bestimmung gebracht“.[2]) Aber bald darauf setzt Wildts Leidensgeschichte ein. Alle neuen Ideen aufgreifend hatte er nicht die Fähigkeit, sie abzuklären: er schwankte stets zwischen Mathematik, Physik, Astronomie, Ökonomie, Technologie und Philosophie.

Ein ähnlich unruhiger Kopf, der nicht hielt, was er in der Jugend versprach, ist auch A. W. F. Murhard, der 17jährig 1796 in Göttingen Magister wurde und gleich darauf Privatdozent. Kästner hat über ihn das Urteil: „Hr. Murhard ist etwas über 17 Jahr alt, sehr thätig und in analytischer Rechnung sehr geübt und nur allzusehr *calculateur à la française,* begnügt sich Formeln zu liefern, unbekümmert ob sie irgend einer nützlichen Untersuchung dienen oder nicht. Den bedachtsamen Gang der griechischen Geometer empfehle ich ihm vergebens.“[3]) Auch C. F. Gauss

---

matik, wo es so viele brauchbare Lehrbücher auch außer den meinigen giebt, bloß um dadurch den Lernenden die Zeit zu verderben.

Er ist seit 1789 hier angesetzet beym *Observatorio* zu dienen, kgl. Regierung befahl mir ihn zu bilden, er war aber schon gebildet, wenigstens eingebildet. Alles was man ihm zugestehen kann ist: die gewöhnlichen Handgriffe beym Observieren zu wissen, die jeder der Lust und Zeit hat, in 4 Wochen lernen kann, und dann nach Vorschriften zu rechnen, ohne sich um derselben Erfindung und Beweiß zu bekümmern, wie der Kaufmannsdiener nach der Kettenregel. So wäre er ein brauchbarer astronomischer Handlanger, müßte sich aber durch Fleiß empfehlen. La Lande nennt ihn *l'astronome paresseux de Goettingue* und die bey ihm Astronomie gehört haben, bezeugen, daß er schwer auf das Observatorium zu bringen sey.

Von den öffentlichen Proben, die jeder Ungelehrte bey Erlangung einer academischen Würde giebt, und die noch viel vollkommener von einem Professor erwartet werden, hat er gar keine abgelegt. Da er daran seit 10 Jahren . . . . und nachdrücklich ist erinnert worden, so bleibt unentschieden, ob er das blos aus Saumseligkeit unterlassen hat oder aus Unvermögen.

Nach dieser Darstellung kann jeder beurtheilen, wie er seine Zeit verwenden wird, wenn er sich Professor Seyffers Unterricht anvertraut.

A. G. Kästner.“

1) Akte der philosophischen Fakultät fasc. 76 (1792/3).

2) Brief vom 4. Mai 1797 in „Personalakte Wildt“ (Archiv des Kuratoriums).

3) Brief an Ephr. Scheibel (19/4 97).

und A. Ide (1775—1806) haben sich später über Murhards leichtfertige Arbeit ungünstig ausgesprochen; Heyne ging in seiner Wertschätzung so weit, in dem bereits zitierten Bericht (4. Mai 1797) zu sagen: „Für die Mathematik besitzt jetzt Göttingen ein Genie von großen ausgezeichneten Fähigkeiten: A. Murhard, der sich schon durch einige sehr glückliche algebraische Erfindungen als einen künftigen Mathematiker vom Range bewiesen hat, ein praecoces Genie, indem er noch nicht 19 Jahr alt ist. Er soll ganz zum Calculator gemacht seyn."

Von den Jüngeren, die Kästners Beifall fanden, ist außer L. H. Tobiesen (1771—1839)[1]) und N. Th. Reimer (1772—1832)[2]) vornehmlich B. F. Thibaut zu nennen, der seit 1792 in Göttingen studierte und 1796 Privatdozent wurde. Die Rezension von Thibauts Dissertation: *Dissertatio historiam controversiae circa numerorum negativorum et inpossibilium logarithmos sistens, quam . . . publicc defendet* Bernh. Friedr. Thibaut" schließt Kästner[3]) mit den Worten: „Darstellung der Lehren und was jeder für eine Meinung ausführt. Prüfung, Vergleichung, Belesenheit, gründliche Einsichten, die Hr. Th. zeigt, geben von ihm für die Wissenschaft vorteilhafte Erwartungen." Aber Kästner hat wohl damals nicht vermutet, daß Thibaut später sein Nachfolger werden sollte. Jedenfalls hat er noch am Tage vor seinem Tode ausgesprochen[4]), daß er Fr. Pfaff in Helmstedt für seinen geeigneten Nachfolger halte. —

Ich möchte hier die Namen nun nicht mehr häufen, die noch zahlreicher würden, wenn ich etwa angeben wollte, welche Vorlesungen um 1800 an der Universität über Mathematik gelesen wurden.[5]) Aber wie zahl-

---

1) Seine Dissertation: *Principia atque historia inventionis Calculi differentialis et integralis, nec non methodi fluxionum,* 1793.

2) N. Th. Reimer verfaßte eine Dissertation über die Geschichte des Problems der Duplikatur des Würfels. Später wurde er 1804 Professor in Kiel und ist bekannt geworden durch seine Übersetzung von Ch. Bossuts (1730—1814) *Essai sur l'histoire générale des mathématiques:* „Versuch einer allgemeinen Geschichte der Mathematik aus dem Franz. übersetzt und mit Anmerkungen und Zusätzen begleitet, Hamburg 1804, 2 Thle."

3) Göttinger gelehrte Anzeigen 1797. 185. Stück.

4) Dies schreibt der Schwiegersohn Kästners A. F. Kirsten an Scheibel, Göttingen 22./6. 1800: „Auf meine 36 Stunden vor seinem Tode gethanene Frage: wer ihn in seiner Stelle ersetzen könnte, antwortete er mit leiser Stimme und glänzend fröhlichem Auge Pfaff. Von diesem versprach er sich außerordentlich viel."

5) Es ist allerdings zu bemerken, daß die früher geübte Strenge bei der Zulassung von Privatdozenten allmählich außer Gebrauch gekommen war. Die früher erforderlichen Disputationen fielen weg, weil die Kenntnis des Lateins immer geringer wurde.

reich auch die Dozenten waren, es fehlte die zentrale Persönlichkeit, um die sich alles gruppierte. Wohl mochte JOH. TOB. MAYER d. J., LICHTENBERGS Nachfolger 1799, Anspruch auf den Lehrstuhl KÄSTNERS zu besitzen glauben, aber es wurde ihm dieser nicht offiziell übertragen, so daß bald eine Reibung zwischen C. F. SEYFFER, B. F. THIBAUT und ihm eintrat. Erst 1805 wurde THIBAUT ordentlicher Professor der Mathematik (die Nominalprofessur ihm aber erst 1829 übertragen).

Im übrigen aber gewinnt man aus dem Studium der Akten der Universität die Überzeugung, daß die Göttinger Universität in dieser Zeit der allgemeinen Unruhe einer Krise entgegenging. Und in der Tat lehrt ein Blick auf die Zeitgeschichte, daß hier Veränderungen sich vorbereiteten, die auch auf die Göttinger Universität ihren Einfluß üben mußten. Schon am Ende des 18. Jahrhunderts begann Göttingen seine führende Stellung zunächst an Jena abzugeben, wo die nachkantische Philosophie ihre Heimstätte fand; vor allem aber lag über dem Ganzen die Schwüle des bevorstehenden Krieges, der in Göttingen die Anzahl der Studierenden bald auf die Hälfte der sonst gewöhnlichen Frequenz herabminderte. Schon 1803 erfolgte die preußische Besitzergreifung von Hannover und danach kam die westphälische Usurpation. Erst 1814 war äußerlich der alte Zustand wieder hergestellt. Aber innerlich hatte sich damit für Göttingen viel geändert. Man darf die Universität Göttingen von dieser Zeit an nicht mehr typisch für die deutschen Universitäten nennen. Und mag man sonst noch die Jahre 1800—1814 ca. als zweite Phase des Neuhumanismus mit jener ersten eng zusammenrechnen, für Göttingen werden sie besser als „Übergangszeit" bezeichnet: in ihr liegen die Keime für manche Seiten der noch heute geltenden Entwicklung. —

Damit ist denn der vorliegenden Arbeit hier ihr Ziel gesetzt: Die alles überragende Gestalt von C. F. GAUSS und der liebenswürdig bescheidene Mensch B. F. THIBAUT[1]), der sich neben GAUSS darauf

1) CHR. G. HEYNE schrieb im Jahre 1808 an J. v. MÜLLER: „Professor THIBAUT verdient als Dozent die größte Achtung; er hat einen Vortrag der trockensten Wissenschaft, welcher mit Vergnügen und Eifer gehört wird; hat bereits die Mathematik zum beliebten Studium gemacht; dabei doch ein scharfsinniger Kopf, der seinen Scharfsinn auf Methode des Vortrags verwendet, und fast ganz und allein (denn zum schreiben und Autorwesen ist er gar nicht gemacht); sonst auch nicht verträglich, ewiger *frondeur* von Allem und von seinem Collegen (i. e. T. MAYER), daher wenig beliebt. Aber über die Fehler muß man hinwegsehen — er ist der beste Dozent. Ich habe ihn immer leicht herumgebracht, wo es schief gehen wollte. (Vgl. die Universität Göttingen, aus den deutschen Jahrbüchern für Wissenschaft u. Kunst abgedruckt, Leipzig. 1842, p. 41, eine Schrift, die in G. viel Aufsehen erregte und deren Verfasser die Linkshegelianer A. OPPERMANN u. BÖCK

beschränkte, in Göttingen „der beste Dozent" zu sein, sind zwei neue Typen, die einer neuen Zeit angehören.

---

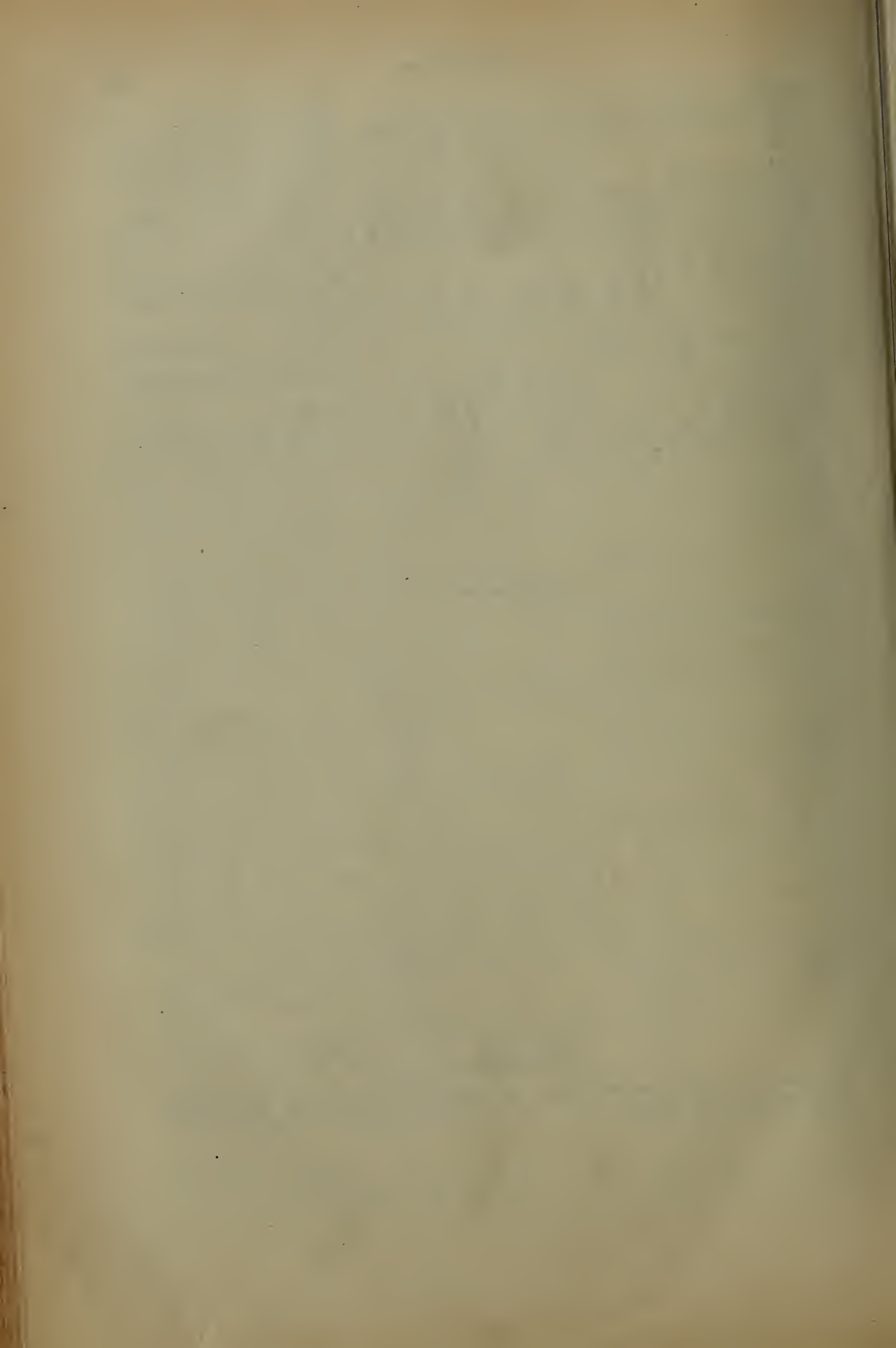
waren.) Über den Vortrag Thibauts siehe auch den Brief Chr. L. Gerlings (1788—1864) an Fr. Pfaff vom 27. Okt. 1810 (cf. Briefwechsel, pg. 272): „Dieser Vortrag ist wirklich, rhetorisch und stylistisch betrachtet, so schön, als man ihn sich nur denken kann; denn Professor Thibaut spricht auf dem Katheder, wie Goethe etwa schreibt. Dieser Vortrag und der schöne und zierliche Periodenbau, nach dem er beständig strebt, ist wahrscheinlich wohl mit die Ursache, weshalb er sich von der sonst gewöhnlichen schulgerechten Demonstration sehr entfernt, und alles durch Räsonnement, das sich besser für Perioden paßt, beweist." — In diesem Hervorkehren des pädagogischen Elements, das unter anderm auch in der Einrichtung der „bekannten Übungsstunde am Sonnabend" und der Befürwortung der Gründung eines mathematischen Seminars (1810) seinen Ausdruck findet, sehe ich das Neue bei Thibaut.

Namenregister.

(Die großen Zahlen bezeichnen die Seitenzahlen, die angehängten kleinen Zahlen die jeweiligen Fußnoten.)

Berichtigung.

Die im Inhaltsverzeichnis (S. 54 u. 55) gegebenen Seitenzahlen sind jeweils um 48 Einheiten zu erhöhen.



DAS PRINZIP DER VIRTUELLEN GESCHWINDIGKEITEN

SEINE BEWEISE UND DIE UNMÖGLICHKEIT SEINER UMKEHRUNG BEI VERWENDUNG DES BEGRIFFES „GLEICHGEWICHT EINES MASSENSYSTEMS“

VON

RICH. LINDT

IN CHARLOTTENBURG

MIT 4 FIGUREN IM TEXT

Inhaltsübersicht.

A. Einleitung: Über einzelne Worte der Überschrift.

1. „Beweis“ und „Prinzip“.

1. Ansicht: die Wissenschaft erklärt.

Zwei verschiedene Ansichten über das Wesen und die Aufgabe der Wissenschaft will ich schildern. Jede von beiden wird uns einen Standpunkt liefern zur Beurteilung der Frage, ob das P. d. v. G. (wie wir das „Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten“ in Zukunft abgekürzt schreiben wollen) eines Beweises fähig und bedürftig ist. — Es ist eine Grundeigenschaft des menschlichen Geistes, daß er die Welt unter der Anschauungsform der Kausalität betrachtet. Darum lebt in uns allen ewig die Frage nach den Ursachen der Erscheinungen. Wenden wir uns an die Naturwissenschaft, daß sie uns Antwort gebe auf unser „warum?“, so befriedigt sie zunächst oberflächlich unser Kausalitätsbedürfnis; wenn wir aber immer weiter vordringen, „daß wir erkennen, was die Welt im Innersten zusammenhält“, so kommen wir schließlich auf letzte Ursachen, deren weitere kausale Begründung uns verweigert wird. Als Ursache für das Fallen des Steines wird uns die Anziehungskraft der Erde genannt. Diese findet ihre Erklärung durch das Newtonsche Gravitationsgesetz. Niemand aber gibt uns Auskunft, warum gerade dieses Gesetz und nicht ein anderes in der Welt Gültigkeit hat. Wir verlangen nun von der Naturwissenschaft, daß sie uns solche Tatsachen als letzte Ursachen der Erscheinung nennt, die imstande sind unser Kausalitätsbedürfnis zufrieden zu stellen. An späterer Stelle werden wir sehen, wie dann diese Tatsachen beschaffen sein müssen.

2. Ansicht: die Wissenschaft beschreibt

Neben dieser Auffassung von der Aufgabe der Naturwissenschaften tritt, vielleicht unter dem Einflusse von Erwägungen erkenntnistheoretischer Art, noch eine andere auf, die die Unterschiede zwischen den Aufgaben der Naturkunde und der Naturwissenschaft verwischt. Kirchhoff sagt in der Vorrede zu seiner mathematischen Physik, „daß es sich nur darum handeln soll, anzugeben, welches die Erscheinungen sind, die stattfinden, nicht aber darum, ihre Ursachen zu ermitteln“. Als Aufgabe der Mechanik im besonderen stellt er es hin, „die in der Natur vor sich gehenden Bewegungen zu beschreiben, und zwar vollständig und auf die einfachste Weise zu beschreiben“. Newton selbst sagt: *„Hypotheseos non fingo“*.

Paul du Bois-Reymond (Nr. 4)[1]) will das Wort „Beschreibung“ ersetzt wissen durch „die Synthese“ oder „die Konstruktion oder der Aufbau des Erscheinungsgebietes aus einfachsten Mechanismen“.

Am ausführlichsten aber werden diese Gedanken vertreten von Mach in seinem Buche „Die Mechanik in ihrer Entwicklung“. „Alle Wissenschaft hat Erfahrungen zu ersetzen oder zu ersparen durch Nachbildung und Vorbildung von Tatsachen in Gedanken —“ (Nr. 17, S. 471). Die Wissenschaft verdankt seiner Meinung nach ihre Entstehung der Notwendigkeit, die Fülle der Erfahrung, die die Menschheit im Laufe der Jahrtausende gemacht hat, übersichtlich und einheitlich darzustellen d. h. zu beschreiben, damit ein einzelner trotz der Beschränktheit seiner Lebenszeit und seines Gedächtnisses möglichst viel davon zu seinem geistigen Eigentum machen kann. Diese Übersichtlichkeit erreicht sie dadurch, daß sie gleichartige Elemente in den Naturvorgängen aufsucht und zu Gruppen zusammenfaßt. Über jede dieser Gruppen macht die Wissenschaft eine einfache Aussage, die das Gemeinsame der Glieder angibt, und übergibt diese wenigen Aussagen unter dem Namen von Grundprinzipien statt der unabsehbaren Menge der Einzeltatsachen dem Gedächtnis. Je kleiner die Zahl solcher Grundprinzipien ist, die eine Wissenschaft zur vollständigen Darstellung der in ihr Gebiet fallenden Tatsachen braucht, desto ökonomischer geht sie mit unserer Gedächtniskraft um und desto vollkommener erreicht sie mithin ihren Zweck, der eben die Ökonomie des Denkens ist; daher soll sie diejenigen Sätze zu Grundprinzipien machen, die in ökonomischer Beziehung am meisten leisten.

Das P. d. v. G. nach der zweiten Ansicht.

Jede dieser beiden Ansichten vom Wesen und von der Aufgabe der Wissenschaft wird uns einen Standpunkt liefern zur Beurteilung der Stellung des P. d. v. G. innerhalb des Lehrgebäudes der Mechanik. Fragen wir an der Hand das Wertmaßstabes, der sich aus der zuletzt entwickelten ergibt, nach der Berechtigung des P. d. v. G., als ein Grundprinzip zu gelten, so wird jeder Zweifel an dieser Berechtigung sofort niedergeschlagen durch den Hinweis auf Lagranges „Analytische Mechanik“. Dort zeigt sich, daß das P. d. v. G. für sich allein als Grundlage der gesamten Mechanik dienen kann, und daß es eine Konsequenz und Einheitlichkeit der Darstellung ermöglicht, die das Lagrangesche Buch für ein Jahrhundert unbestritten zum klassischen Grundwerk der Mechanik hat werden lassen. Deshalb kann Mach auf einen „Beweis des P. d. v. G.“ verzichten. „Es ist wichtig“ sagt er (S. 73) „sich klar zu machen, daß es sich bei dem Prinzip lediglich um Konstatierung einer Tatsache handelt.“ Er befindet sich dabei in Übereinstimmung mit Jacobi (Nr. 12, S. 15), der von einer

1) Die Zahlen beziehen sich auf das Literaturverzeichnis.

mit der Anwendung des P. d. v. G. identischen Operation sagt: „Diese Ausdehnung zu beweisen ist keineswegs unsere Absicht, wir wollen sie vielmehr als ein Prinzip ansehen, welches zu beweisen nicht nötig ist."

Das P. d. v. G. nach der ersten Ansicht.

Viel zweifelhafter erscheint die Prinzipieneigenschaft des P. d. v. G. vom anderen Standpunkte aus. Befriedigt das P. d. v. G. das Kausalitätsbedürfnis? Diese Frage kann weder durch das Experiment entschieden werden, wie die (vorhin erörterte) nach dem ökonomischen Wert durch den Aufbau des Lagrangeschen Lehrgebäudes entschieden ist, noch läßt sie sich durch logische Deduktion beantworten, hier spielt vielmehr die geistige Struktur des einzelnen, namentlich aber die historische Entwicklung der Wissenschaft eine Hauptrolle. „Axiom, Theorem oder Erfahrungstatsache, zwischen diesen drei Angelpunkten wurde wie alle physikalischen Sätze auch das P. d. v. G. umhergeworfen" (Nr. 28). Galilei zum Beispiel sieht im P. d. v. G. nur eine Eigenschaft des Gleichgewichts, Descartes und Vallis dagegen die Ursache desselben (conf. Lagrange, Analytische Mechanik Nr. 14, S. 18).

Verschiedene Zeiten, verschiedene Autoren, verschiedene Grundprinzipien.

Nicht nur die Frage, ob das P. d. v. G. sich zur kausalen Grundlage der Mechanik eignet, sondern auch diejenige, welcher Satz sich besser dazu eignen würde, ist im Laufe der Zeiten verschieden beantwortet worden. Das 17. Jahrhundert legt das Hauptgewicht auf die Gewinnung eines durch exakte Beobachtung gesicherten Tatsachenmaterials. Die Induktion beginnt soeben erst ihr Werk, indem sie aus den Tatsachen eine Reihe von „Prinzipien" ableitet, die sie zunächst ruhig nebeneinander bestehen läßt. Damals war das P. d. v. G. gleichwertig mit allen anderen aus ebenso guten Beobachtungen hervorgegangenen Prinzipien, etwa dem des Hebels, der schiefen Ebene, der Kräftezusammensetzung. Im 18. Jahrhundert wird die Zusammenfassung noch weiter getrieben, man bemerkt, „daß die sogenannten Prinzipien nicht unabhängig voneinander diesen Namen führen können, sondern daß jedes von ihnen auf den Rang einer Folgerung oder eines Lehrsatzes herabsteigen muß, sobald die Darstellung der Mechanik auf eines oder mehrere der übrigen gegründet wird" (Heinr. Hertz, Die Prinzipien der Mechanik S. 4). Nun stand die Wissenschaft damals gänzlich unter dem Einflusse Newtons. Dieser stellte den Kraftbegriff, das Prinzip von der Unabhängigkeit der Wirkung und das aus beiden sich ergebende Parallelogramm der Kräfte in den Vordergrund. Mit Newtons Anschauungen war damals jedermann vertraut, der sich wissenschaftlich mit Mechanik beschäftigte, darum mußte alle kausale Erklärung mechanischer Erscheinungen auf die von ihm angenommenen Prinzipien ausmünden, und das P. d. v. G. erhielt dementsprechend seine Beweise. Auch im 19. Jahrhundert finden wir die Mechanik im wesentlichen noch beherrscht von

Newtons Prinzipien, daneben aber treten andere auf, die ihnen den Platz streitig machen, so das Prinzip der lebendigen Kraft, die Grundprinzipien von Gauss, Hertz u. a. Jedes von ihnen macht den Anspruch, zur Erklärung der mechanischen Tatsachen auszureichen, und muß daher einen Beweis für das P. d. v. G. liefern. So spricht Gauss in dem berühmten Aufsatze in Crelles Journal (Nr. 9) ausdrücklich dem P. d. v. G. die Eigenschaft ab, „daß es sich, sowie es nur ausgesprochen wird, schon von selbst als plausibel empföhle", und setzt hinzu: „in dieser Beziehung scheint das Prinzip, welches ich hier aufstellen werde (Das Prinz. d. kl. Zwanges), den Vorzug zu haben".

„Beweis" und „Prinzip" widerspricht einander.

Aus vorstehendem ergibt sich, daß das P. d. v. G. nicht immer und nicht von allen Autoren als Prinzip betrachtet worden ist, wenn man unter „Prinzip" seiner Herkunft vom lateinischen „principium" d. h. „Anfang" entsprechend einen Satz versteht, der eines Beweises weder fähig noch bedürftig ist. Streng genommen ist „Beweis eines Prinzips" eine *contradictio in adjecto*. Trotzdem geht das P. d. v. G. in der Mechanik ebenso wie der Satz über die Erhaltung der Flächen oder über die Bewegung des Schwerpunktes unter dem Namen „Prinzip", auch dort, wo es durch Beweise gestützt wird. Nachdem wir uns dieser Ungenauigkeit im Sprachgebrauch einmal bewußt geworden sind, wollen wir im folgenden, wo wir uns gerade mit diesen Beweisen zu beschäftigen haben, die üblich gewordene Ausdrucksweise beibehalten. So viel über die in der Überschrift stehenden Worte „Beweise" und „Prinzip".

2. „virtuell" und „möglich".

Nun „virtuell". Dafür finden sich in der Literatur zwei gänzlich voneinander abweichende Deutungen. Die eine übersetzt es einfach durch „möglich" und versteht demnach unter virtuellen Geschwindigkeiten solche, welche mit der Natur der Verbindungen des Systems und miteinander verträglich sind (Mach Nr. 17, S. 55). Zu dieser Ansicht bekennt sich z. B. Rausenberger (Nr. 25, S. 133), der bei der Erörterung des P. d. v. G. von einer „virtuellen, d. h. möglichen" spricht. Die andere Deutung bezeichnet als *„vitesses virtuelles"* diejenigen, welche dadurch entstehen, *„que l'on imprime à tout le systeme (de ces forces) un petit mouvement"*, wie es in dem oft zitierten Briefe Joh. Bernoullis an Varignon (Nr. 2) heißt, in welchem das Wort *vitesses virtuelles* wohl zum erstenmal vorkommt. Hier ist von einer Beschränkung der Freiheit des Systems gar keine Rede, das Wort „virtuell" deutet vielmehr nur an, daß die Geschwindigkeiten mit dem tatsächlichen Bewegungszustand des Systems nichts zu tun haben, sondern daß die Bewegung eigens für den Zweck der statischen Untersuchung

hervorgerufen wird oder hervorgerufen gedacht wird, damit dadurch „die ruhenden und verborgenen Verhältnisse der Statik genötigt werden, in sichtbaren Proportionen hervorzutreten“ (EUGEN DÜHRING, Prinzipien der Mechanik II. Aufl., S. 79). Dabei hat man wie CARNOT (*Principes fondamentaux de l'equilibre et du mouvement,* Paris 1803) betont, die von außen her einwirkende Kraft, die zur Erzeugung dieser Bewegung zu verwenden wäre, als unendlich klein oder jedenfalls als für den Gleichgewichtszustand nicht in Betracht kommend anzusehen. Auch LAGRANGE ist dieser Auffassung treu geblieben, wie aus der Form hervorgeht, die er dem Prinzip (*Mécanique analytique* Nouv. Ed. 1811 S. 22, Nr. 17) gibt. Man kann von dem Begriff der möglichen Geschwindigkeiten absehen, wenn man grundsätzlich alle Verbindungen von materiellen Punkten durch Kräfte ersetzt, was wir später noch ausführlich zu behandeln haben werden, doch bleibt er unentbehrlich für die Anwendung des P. d. v. G. zur Lösung von Aufgaben, worauf wir gleichfalls noch zurückkommen. Wir werden hinfort das Wort „virtuell“ in dem oben gekennzeichneten Sinne von BERNOULLI und LAGRANGE gebrauchen, und unabhängig davon das Wort „möglich“ in der oben angegebenen Bedeutung.

3. „Geschwindigkeiten“.

Schließlich „Geschwindigkeiten“. Das Wort (italien. *velocità*) dürfte in diesem Zusammenhang zum erstenmal von GALILEI angewandt sein, denn in den mir bekannt gewordenen, aus der Zeit vor GALILEI stammenden Fassungen wird der entsprechende Begriff einmal etwas unbestimmt durch *motus*[1]), ein andermal durch *spatium*[2]) gegeben. Für GALILEI war der Begriff der (gleichförmigen) Geschwindigkeit mit den Problemen des Gleichgewichts auf das engste verknüpft, denn er hatte durch sein Beharrungsgesetz zuerst ausgesprochen, daß sich ein Körper nur dann mit konstanter Geschwindigkeit bewegen kann, wenn entweder keine Kräfte auf ihn wirken oder wenn die auf ihn wirkenden im Gleichgewicht sind. Ihm lag also der Gedanke nahe, den Zusammenhang zwischen den Geschwindigkeitsverhältnissen eines Systems und den Bedingungen für das Gleichgewicht

---

1) M. VARRONIS *de Motu Tractatus,* Genevae 1584, S. 19: *Duarum virium connexarum, quarum (si moveantur) motus erunt ipsis proportionales, neutra alteram movebit, sed aequilibrium faciet.*

2) GUIDI UBALDI *Mechanicorum liber,* Pisauri 1577, pag. 83: *„Ex his manifestum est, ita se habere pondus ad potentiam ipsum sustinentem, sicut spatium potentiae moventis ad spatium ponderis moti.*

NB. Diese Stellen sind nach den in der Königlichen Bibliothek zu Berlin befindlichen Originalausgaben zitiert.

der daran wirkenden Kräfte aufzudecken, Bedingungen, denen er auch für das ruhende System Gültigkeit beimessen konnte, da gerade er ja gelehrt hatte, daß die Ruhe als Spezialfall der gleichförmigen Bewegung anzusehen sei. In neuerer Zeit ist der Begriff der Geschwindigkeit an dieser Stelle vielfach durch den anschaulicheren der Verschiebung oder Verrückung ersetzt worden, z. B. bei MÜLLER-Breslau (Nr. 20, S. 11), wo statt P. d. v. G. vorgeschlagen wird „Gesetz der virtuellen Verschiebungen". Dies ist zulässig, wenn die Geschwindigkeiten während der Verschiebung konstant bleiben, wenn also die Kräfte auch in der neuen Lage im Gleichgewicht sind, was aber im allgemeinen nur dann zutrifft, wenn sie nicht Funktionen des Ortes sind. Sind sie vom Orte abhängig, so muß man entweder die Verschiebung unendlich klein nehmen, so daß die inzwischen eintretenden Geschwindigkeitsänderungen vernachlässigt werden können, oder man ignoriert die Veränderlichkeit der Kräfte und hält sie, sogar im Bereich endlicher Verschiebungen, konstant, so daß auch die Geschwindigkeiten sich nicht ändern. (Dadurch fällt freilich die Verschiebung aus der Sphäre der Wirklichkeit und mechanischen Möglichkeit heraus und wird zu einer rein algebraischen Operation, wie das weiterhin zu besprechen bleibt.) Nunmehr können die Verhältnisse der konstanten Geschwindigkeiten, auf die es ja allein ankommt, durch die der Wege vertreten werden, selbstverständlich vorausgesetzt, daß die Zeitabschnitte für die Bewegungen der einzelnen Systempunkte identisch sind (cf. RAUSENBERGER Nr. 25, S. 133). Andere Autoren hielten es wohl für nötig, schon im Namen des Satzes auszudrücken, daß die virtuellen Geschwindigkeiten stets multipliziert mit den Kräften auftreten; sie übernahmen die für die entsprechenden Produkte beim Prinzip der lebendigen Kraft (dem dynamischen Zwillingsbruder des P. d. v. G.) eingebürgerte Ausdrucksweise und gelangten so zum Namen „Prinzip der Arbeit", den z. B. MOHR (Nr. 19, S. 251) gebraucht. Übrigens werden Begriffe, die dem der Arbeit entsprechen, seit jeher bei der Darlegung des P. d. v. G. verwendet, so (bei DESCARTES Nr. 6, tome 8, S. 14, Zeile 5 u. 6 von unten) *action, effort,* (bei BERNOULLI Nr. 2) Energie, (bei GALILEI) virtuelles Moment.

Verschiebungen.

Arbeiten.

B. Die Beweise.

I. Die Zeit der Gleichwertigkeit der Prinzipien.

Wir hatten vorhin gesehen, daß im 17. Jahrhundert die einzelnen mechanischen Prinzipien, wie das des Hebels, der schiefen Ebene, unser P. d. v. G. usw., noch als gleichwertige unmittelbar aus der Erfahrung abgeleitete

Sätze nebeneinander standen, daß also von einem Beweise im eigentlichen Sinne des Wortes noch bei keinem (also auch nicht beim P. d. v. G.) die Rede sein konnte. Aber man hatte auch damals, und vielleicht in jener ersten Blütezeit der Wissenschaft besonders stark, den Wunsch, zu einer einheitlichen Auffassung der Natur durchzudringen. Daher untersuchte man die Beziehungen der einzelnen Prinzipien zueinander. Ferner bemühte man sich darzutun, daß sie mit denjenigen Vorstellungen im Einklang ständen, die jedem Menschen auch ohne besondere Beobachtung der Naturvorgänge instinktiv geläufig sind. Damals gab man sich über die Herkunft und Zuverlässigkeit dieser instinktiven Einsichten wohl noch keine Rechenschaft. Heute betrachten wir auch sie als Ableitungen aus der Erfahrung. Im Gegensatz zu anderen empirischen Kenntnissen ist aber das ihnen zugrunde liegende Tatsachenmaterial so groß, daß uns die einzelnen Beobachtungen, aus denen es geschöpft ist, nicht mehr im Gedächtnis haften und auch gar nicht mehr die Schwelle des Bewußtseins überschreiten, wenn sie sich wiederholen. Diese breite Grundlage der instinktiven Kenntnisse rechtfertigt bis zu einem gewissen Grade die höhere Autorität, die wir ihnen einräumen. Da ihre Entstehung im Unbewußten liegt, so erscheinen sie dem forschenden Verstande, der durch erkenntnistheoretische Reflexionen noch nicht beeinflußt ist, als a priori gegebene Wahrheiten und besitzen deshalb in hohem Grade die Kraft, das Kausalitätsbedürfnis zufrieden zu stellen. In den Schriften GALILEIS werden wir öfter an der Hand solcher instinktiven Erkenntnisse auf Sätze geführt, die mit dem P. d. v. G. identisch sind oder doch den Keim dazu in sich tragen. Als Beispiel nenne ich die Stelle (Nr. 8, vol. IV, pag. 222 zitiert nach TÄSCHNER): „*Quanto si guadagna di forza per mezzo lore (degli instrumenti mecanici) altrettanto si scapita nel tempo e nella velocitate.*“ Der Gedankengang ist dort etwa folgender: Eine Kraft, die kleiner ist als eine durch sie zu bewegende Last, braucht dieselbe Zeit zur Überwindung einer gewissen Wegstrecke, welche eine der Last gleiche Kraft zur Verschiebung der Last durch die gleiche Wegstrecke nötig hat, doch muß ihr Angriffspunkt sich dann um so vielmal schneller bewegen, wie sie kleiner ist, da er den Weg in derselben Zeit um so vielmal öfter machen muß. Diese durch den Mangel mathematischer Hilfsmittel etwas schwerfällige Ausdrucksweise kann man sich verdeutlichen, wenn man ein einfaches Beispiel wählt, wie es GALILEI vorgeschwebt haben mag, etwa eine Sandmasse, die durch Arbeiter in einer gegebenen Zeit eine gegebene Strecke weiter befördert werden soll. Die Richtigkeit des GALILEIschen Satzes ergibt sich dann von selbst unter der Voraussetzung, daß die Arbeiter in Gruppen von gleicher Mitgliederzahl geteilt sind, von denen sich jede st dann in Bewegung setzt,

Die instinktiven Erkenntnisse.

Das P.d.v.G. auf instinktive Erkenntnisse gestützt.

wenn die vorhergehende ihr Ziel erreicht hat. Dieser Satz wird nun auf den Fall übertragen, daß die Last nicht wie eine Sandmasse beliebig teilbar ist. Dann muß die Vergrößerung der Geschwindigkeit durch Anordnung einer Maschine (Hebel, Flaschenzug) bewirkt werden, und unser Satz wird zum P. d. v. G. — Ähnliche Gedanken findet man bei DESCARTTES (Nr. 6, tome V, S. 431). Er sieht die Grundlage der Maschinentheorie in einem einzigen Prinzip, *„qui est que la meme force, qui peut lever un poids, par exemple de cents livres à la hauteur de deux pieds, en peut aussi lever un de deux cent livres à l'hauteur d'un pied ou un de quatre cent à la hauteur d'un demi pied"*. Eine Kraft aber, die eine Last gerade noch (ohne Beschleunigung) heben kann, vermag sie auch im Gleichgewicht zu halten. Der Ausdruck *„force"*, der uns hier befremdet, ist übrigens unter ausdrücklicher Bezugnahme auf diese Stelle von DESCARTES selbst durch die oben zitierten passenderen *(action, effort)* ersetzt worden. Man sieht deutlich, wie DESCARTES durch die instinktive Vorstellung geleitet wird, daß es die Arbeit ist, auf die es hier ankommt. Es ließe sich leicht zeigen, daß auch dieser Satz das P. d. v. G. in nuce enthält, doch wollen wir hier nur noch auf das Wort *„lever"* aufmerksam machen. Es deutet offenbar an, daß nur der Höhenunterschied, nicht die Entfernung zwischen Anfangs- und Endlage, maßgebend ist; über den Weg, auf dem das Heben erfolgt, wird nichts ausgesagt, man könnte es also auch etwa vermittels einer schiefen Ebene vornehmen. Hinter dem *„lever"* steckt mithin die Reduktion des Weges auf die (hier vertikale) Kraftrichtung. Wenn man wie DESCARTES in der Proportionalität von Kraft und Weg instinktiv das gleichgewichtsbestimmende Element sieht, so setzt man streng genommen eben dadurch das P. d. v. G. als gültig voraus, und es führt daher zu einem Zirkelschluß, wenn man es, was DESCARTES nicht beabsichtigt, streng logisch aus dieser instinktiven Grundlage ableiten will. Dieser Fehler ist charakteristisch für eine große Anzahl von Scheinbeweisen, von denen ich zwei der Zeit nach weit auseinandergelegene zur Probe darstellen will. Erstens: D'ALEMBERT führt (Nr. 1, S. 37) das P. d. v. G. als erstes Theorem über das Gleichgewicht ein. Haben wir zwei Körper, die gleich sind und gleiche Geschwindigkeiten haben, so folgt für ihn die Richtigkeit des Satzes aus der Symmetrie; dann verdoppelt er die Masse des einen von den beiden und halbiert seine Geschwindigkeit. Diesen Fall führt er auf den vorigen zurück, indem er wie DESCARTES einfach festsetzt, daß sich die so entstandenen Verhältnisse durch die des ersten Falles ersetzen lassen, mit den Worten: *„Car on peut regarder la vitesse du petit corps comme composée de deux vitesses, égales chacune à la vitesse du grand, et la masse du grand comme composée de deux masses égales, animée chacune de la meme vitesse.*

Scheinbeweise.

Donc à la place de chacune des masses proposées on peut imaginer de chaque coté deux masses égales animées des vitesses égales.“ Entsprechend behandelt er den Fall, wo sich allgemein die Massen umgekehrt wie die Geschwindigkeiten verhalten, durch eine uns recht gewaltsam vorkommende Zurückführung auf Symmetrie. Zweitens Rausenberger (Nr. 25, der sich allerdings der Schwächen seines Beweises bewußt ist) setzt zunächst ein System von materiellen Punkten voraus, dem ein Grad von Freiheit gelassen ist. Eine Kraft X_2 am Punkte x_2 bringt eine bestimmte Bewegung des ganzen Systems und damit auch eines Punktes x hervor. Welche Kraft X_2' muß man am Punkte x (natürlich immer in der Richtung der Beweglichkeit des betreffenden Punktes) anbringen, um denselben Effekt zu erzielen? Zwei Kräfte verhalten sich wie die Wege, welche ihre Angriffspunkte von der Ruhelage aus in gleichen Zeiten zurücklegen, vorausgesetzt, daß sie den Einwirkungen der Kräfte frei folgen können[1]); also: $X_2 : X_2' = dx_2 : dx_1$, wenn man durch dx_2 und dx_1 die betreffenden Wege bezeichnet. Ist diese Gleichung erfüllt, so ist also X_2 und X_2' äquivalent, woraus dann das P. d. v. G. leicht folgt. Ist das System nicht zwangläufig, so wird es durch Hinzufügung willkürlicher mit den übrigen verträglicher Bedingungen (man denke z. B. an das Erstarrenlassen einer Flüssigkeit) zwangläufig gemacht.[2]) Durch nacheinander vorgenommene, passend gewählte Abänderungen dieser Zusatzbedingungen werden allmählich alle möglichen Verschiebungen berücksichtigt. Der Satz „die Kräfte verhalten sich wie die Wege usw.“, den er ohne weiteres auf dieses System anwendet, ist in dieser Anwendung nichts weiter als das P. d. v. G. Seine Richtigkeit folgt nur für freie Massenpunkte aus der Kraftdefinition, und seine Anwendbarkeit auf das System, die eben das P. d. v. G. ist, ist nicht bewiesen. — Einen Zirkelschluß enthält auch der bei Jacoci (Nr. 12, S. 15) erwähnte Beweis von Laplace.

Newton erläutert das P.d.v.G. durch die Stoßgesetze.

Nun noch ein Beispiel für die gegenseitige Stützung der einzelnen Prinzipien. Die galileischen Verifizierungen des P. d. v. G. durch das Hebelprinzip (z. B. Nr. 8, Vol. IV, pag. 186, zitiert nach Taeschner) würden uns nichts Neues bieten. Interessant aber ist eine Stelle in Newtons *philosophiae naturalis principia mathematica* (Nr. 22, Tomus secundus, pag. 27 unten): *„Ut corpora in concursu reflexione idem pollent, quorum velocitates sunt reciprocae ut vires insitae: sic in movendis instrumentis mechanicis agentia idem pollent et conatibus contrariis se mutuo sustinent, quorum velocitates, secundum*

1) und vorausgesetzt, daß die zu bewegenden Massen für beide Kräfte gleich groß oder identisch sind.

2) Diese Betrachtungsweise findet sich auch schon bei Poinsot (37, S. 207) und später wieder bei Duhamel (36, S. 100).

determinationum virium aestimatae, sunt reciprocae ut vires. Sic pondera aequipollent ad movenda brachia librae, quae, oscillante libera, sunt reciprocae ut eorum velocitates sursum et deorsum.“ Hier zieht also NEWTON die Gesetze des Stoßes heran, um durch die Analogien, die sie bieten, das P. d. v. G. zu verdeutlichen. Umgekehrt verwendet VARIGNON das P. d. v. G. zur Verifikation des Stoßgesetzes, deren Gebiet wir doch heute als abseits von den Problemen der Statik liegend zu betrachten gewohnt sind. Bei ihm heißt es (Nr. 35, Bd. II, S. 186): *„Il est à remarquer, que cette égalité des sommes d'Energies — dans le cas d'équilibre entre ce poids et ces puissances avec des cordes seulement se trouvera de même entre des forces de plusieurs corps, qui, en choquant tous à la fois un autre, qui sans force ni action aucune de sa part, demeure en repos, non obstant tous ces chocs simultanes.“*[1]) Der Anfang dieser Stelle weist auf eine kurz vorher von VARIGNON gegebene Ableitung des P. d. v. G. zurück, und indem wir uns dieser nunmehr zuwenden, kommen wir zum zweiten Hauptteil unserer Arbeit.

VARIGNON erläutert die Stoßgesetze durch das P. d. v. G.

II. Beweise auf Grund des Prinzips von der Zusammensetzung der Kräfte.

Hier beginnen die eigentlichen Beweise, von denen wir zunächst diejenigen behandeln, die sich auf das Prinzip der Zusammensetzung der Kräfte gründen. Letztere werden wir weiter zu trennen haben in solche, welche sich direkt auf Körper beziehen, und solche, welche erst einzelne Massenpunkte betrachten, aus denen sich dann die Körper aufbauen.

VARIGNONS Beweis.

Bei VARIGNON freilich hat diese Unterscheidung noch keinen Sinn, denn er zieht die räumliche Ausdehnung der Körper noch gar nicht in Betracht, obwohl er, wie wir sogleich sehen werden, schon das Gleichgewicht von Kräften untersucht, deren Wirkungslinien weder in derselben Ebene liegen, noch durch denselben Punkt gehen. VARIGNON gibt den an ihn gerichteten berühmten Brief BERNOULLIS wieder, an dessen Schluß das P. d. v. G. mit den Worten ausgesprochen wird (Nr. 35, Bd. II, S. 176): *„En tout équilibre de forces quelconques, en quelque manière qu'elles soient appliquées et suivant quelques directions, qu'elles agissent les unes sur les autres, ou médiatement*

---

1) Bei der Ausführung dieses Themas kommt VARIGNON auf den Fall zu sprechen, wo der gestoßene Körper nicht rein passiv ist, sondern eine *„force propre“* oder eine Eigenbewegung hat. Er führt ihn auf den vorigen zurück mit den Worten: *„il n'y aurait qu'à régarder cette force propre ou ce mouvement du corps choqué comme l'effet d'un nouveau corps (que j'appelle choquant imaginaire).“* Ich zitiere diese Stelle, obgleich sie mit unserm Thema nur in losem Zusammenhang steht, wel ein ähnlicher Gedanke in neuester Zeit von HERTZ weiter verfolgt ist, der ebenfalls imaginäre Massen zur Konstruktion der Tatsachen benutzt.

ou immédiatement, la somme des Energies affirmatives sera égale à la somme des Energies negatives, prises affirmativement.“ Aus den vorhergehenden Definitionen ergibt sich, daß das Wort „*Energies*“ hier genau wie unser „Arbeit“ gebraucht ist. „*Energies affirmatives*“ und „*Energies negatives*“ könnte man (wenn ich nicht irre nach CLAUSIUS) durch „getane Arbeit“ und „erlittene Arbeit“ übersetzen. VARIGNON gibt nun eine Demonstration dieses Prinzips für sieben Spezialfälle, worunter sich auch der des Wellrades (partie III, S. 197), des Hebels (partie IV, S. 206) und der schiefen Ebene (partie V, S. 213) befindet. Wir wählen als Beispiel den ersten, der von dem Gleichgewicht eines schweren Körpers spricht, welches durch gespannte Fäden aufrecht erhalten wird. Diese Fäden mögen zunächst alle durch denselben mit dem Körper fest verbundenen Punkt laufen. Wir unterscheiden wieder zwei Unterfälle. Erstens (Figur 254 und 255 in der Figurentafel VARIGNONS): Die Fäden sind nicht über Rollen geführt und erleiden durch die virtuelle Verrückung keine Richtungsänderungen, sondern nur Parallelverschiebungen. Die durch sie ausgeübten Kräfte bleiben mithin während der Verrückung nach Größe und Richtung konstant, so daß diese eine endliche Größe haben darf. Zweitens (Figur 254 und 256 bei VARIGNON): Die Fäden sind über feste Rollen geführt, ändern also bei einer virtuellen Verschiebung ihre Richtung; die Verschiebung wird deshalb unendlich klein genommen. Ich will der Kürze wegen nur den springenden Punkt des Beweises in moderner Form andeuten. In nebenstehender Figur sei P eine beliebige von den im Punkte 0 angreifenden Kräften, zu denen auch die Last des Körpers gehört, v sei die endliche oder unendliche kleine Verschiebung von 0. Vorausgesetzt wird als Gleichgewichtsbedingung, daß die Summe der Komponenten nach beliebiger Richtung genommen gleich Null sei. Demgemäß projiziert man alle Kräfte auf die Richtung der virtuellen Verschiebung (was der Allgemeinheit des Beweises keinen Eintrag tut, da diese Richtung selbst ja beliebig gewählt werden kann) und erhält als analytische Form der Gleichgewichtsbedingung die Gleichung $\Sigma P \cos \varphi = 0$.

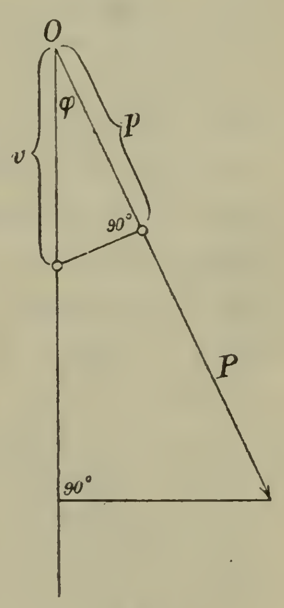


Fig. 1.

Durch Einführung von $\cos \varphi = \frac{p}{v}$ ergibt sich $\sum P \frac{p}{v} = 0$. Da nun $\frac{1}{v}$ ein allen Gliedern gemeinsamer Faktor ist, kann man es vor das Summenzeichen setzen und die Gleichung damit dividieren; sie nimmt dadurch die Form an $\Sigma P p = 0$, in der sie mit dem analytischen Ausdruck des P. d. v. G.

identisch ist. VARIGNON verallgemeinert dann diese Ausführungen, indem er den Fäden Verzweigungen gibt, wodurch er, wie oben angedeutet, schon allgemeine Kräftesysteme des dreidimensionalen Raumes in den Kreis seiner Betrachtungen zieht. Er führt diese verwickelteren Verhältnisse durch wiederholtere Anwendung des dargelegten Verfahrens leicht auf die vorhin betrachteten einfacheren zurück.

Der Beweis gilt auch für den materiellen Punkt.

Wie schon erwähnt, zieht VARIGNON die räumliche Ausdehnung des schweren Körpers nicht in Betracht. Er macht vielmehr, wie wir heute sagen würden, den Schwerpunkt zum Vertreter des ganzen Körpers, was ja auch GALILEI bei seinen Fallgesetzen usw. tat. Im Schwerpunkt eines Körpers sehen wir aber den materiellen Punkt *κατ' ἐξοχήν*, denn wir denken ihn uns als Punkt, also ausdehnungslos, und doch mit Masse begabt. Wir können daher die oben entwickelte Gleichung $\Sigma Pp = 0$ auch auf Kräfte anwenden, die an einem materiellen Punkt angreifen, wodurch das P. d. v. G. auch für den (freien) materiellen Punkt bewiesen ist.

Andere Form des Beweises für den mat. Punkt.

Von vielen Autoren wird daher dieser Beweis mit Rücksicht auf den bei ihnen vorher eingeführten Begriff der „Resultierenden" ein wenig modifiziert. Schaffen wir in obiger Gleichung $\Sigma Pp = 0$ eins von den unter dem Summenzeichen stehenden Produkten auf die andere Seite, so besagt sie, daß die mit umgekehrten Vorzeichen versehene Arbeit e i n e r von den Kräften gleich der S u m m e der Arbeiten der übrigen ist. Man zieht nun das Vorzeichen zur Kraft (nicht zur virtuellen Verschiebung) und kehrt dadurch ihren Sinn um, wodurch sie, vorausgesetzt, daß das Kräftesystem vorher im Gleichgewicht war, zur Resultierenden aller übrigen wird, wie wohl hier nicht näher gezeigt zu werden braucht. So gelangt man zu dem Satze, daß die Arbeit der Resultierenden eines an einem materiellen Punkt angreifenden Systems von Kräften bei jeder virtuellen Verschiebung der Summe der von den einzelnen Kräften geleisteten Arbeit gleich ist. Ist nun der Punkt im Gleichgewicht, so verschwindet die Resultierende der auf ihn wirkenden Kräfte und damit auch die von ihr geleistete Arbeit. Es ist mithin auch die ihr gleiche Summe der von den einzelnen Kräften geleisteten Arbeit in diesem Falle gleich Null.

Ausdehnung des Beweises auf das beliebige System.

Wir gehen zu einem beliebigen System von materiellen Punkten über, an welchen teils innere, teils äußere Kräfte wirken. Wenn ein solches System trotz der Einwirkung der an ihm tätigen Kräfte im Gleichgewicht sein soll, so muß jeder einzelne seiner Punkte im Gleichgewicht sein, d. h. es muß die Summe der virtuellen Arbeiten der Kräfte, welche an jedem einzelnen Punkt angreifen, für jede unendlich kleine Verschiebung desselben gleich Null sein. Hieraus geht hervor, daß die Summe der virtuellen Arbeiten aller Kräfte, welche auf die verschiedenen Punkte des Systems

wirken, gleich Null ist, wie auch die unendlich kleinen und voneinander unabhängigen Verschiebungen beschaffen sein mögen, welche den einzelnen Punkten gleichzeitig erteilt werden. (Delaunay Nr. 5, S. 249.) Denselben Weg schlagen auch viele andere Lehrbücher der Mechanik ein. Ich nenne davon Ritter, Lehrbuch der analytischen Mechanik (Nr. 26, S. 169). Lehrbücher müssen, namentlich, wenn sie für Techniker bestimmt wie die beiden genannten, auf Anschaulichkeit in der Darstellung Wert legen, deshalb finden wir hier eine Operation in ein geometrisch-mechanisches Gewand gekleidet, die einen rein analytischen Sinn hat, denn der mechanischen Seite der Sache sind wir vollkommen gerecht geworden, wenn wir festgestellt haben, daß bei Gleichgewicht die Resultierende der an jedem einzelnen Punkt angreifenden Kräfte gleich Null sein muß. Wenn wir aber diese gar nicht vorhandenen Resultierenden als Faktoren in Produkten verwenden und mit ihnen weiter rechnen, so verliert das hieraus abgeleitete P. d. v. G. die mechanische Bedeutung, die wir bei Galilei vollkommen deutlich an ihm erkennen. Bei ihm und seinen Zeitgenossen diente das P. d. v. G. dazu, die damals wohl noch nicht ausgebildete Ersetzung der Verbindungen durch Kräfte zu vertreten. Galilei hatte noch nicht die uns heute so geläufige Vorstellung, daß am Endpunkt jedes Armes eines im Gleichgewicht befindlichen Hebels außer dem angehängten Gewicht noch andere (Reaktions-) Kräfte tätig seien; infolgedessen war für ihn die Resultierende an diesem Endpunkt keineswegs gleich Null. Die Summe der bei einer virtuellen Verschiebung geleisteten Arbeit verschwand bei ihm nicht deshalb, weil jeder Summand gleich Null war, sondern weil sich die wirklich vorhandenen endlichen Werte der Summanden gegenseitig aufhoben. Anders bei dem oben dargelegten Verfahren, dessen eigentlichen Inhalt wir nunmehr an der Hand von Helmholtz (Nr. 10) untersuchen wollen.

Mechanische Inhaltslosigkeit des so begründeten P. d. v. G.

Setzen wir ein System von n im Gleichgewicht befindlichen Massenpunkten voraus und legen einem beliebigen von ihnen den Index a bei, so wird das Gleichgewicht bedingt durch die Erfüllung der Bedingungsgleichung $\sum_a R_a dx_a = 0$, wo wir unter R die Resultierende aller auf einen Massenpunkt wirkenden Kräfte und unter dx „einen unserer Willkür überlassenen Faktor“ (Nr. 10, S. 277) zu verstehen haben;[1]) die Hinzufügung der unbestimmten Koeffizienten dx_a ist bei diesem Schritt notwendig. Wenn man einfach die Summe sämtlicher Resultierender gebildet hätte, so würde man

Wahre Bedeutung der Operation

1) Da die verständliche Auseinandersetzung der höchst zweckmäßigen Helmholtz'schen Originalschreibweise hier zu viel Zeit kosten würde und doch nur für diesen einen Abschnitt Wert hätte, so bedienen wir uns hier der sonst üblichen.

zwar auch von dieser aussagen müssen, daß sie bei Gleichgewicht eines konservativen Systems gleich Null ist. Diese eine Aussage würde aber nicht die Schar von Bedingungen, aus denen sie entstanden ist, ersetzen, denn das Verschwinden der Summe könnte ebensowohl dadurch zustande kommen, daß die einzelnen Glieder, teils positiv teils negativ, sich gegenseitig vernichten. Bei unserer Gleichung aber ist das ausgeschlossen, denn wir können den Willkürlichen dx immer die gleichen Vorzeichen geben, welche die zugehörigen R besitzen, so daß alle Summanden positiv werden und deshalb im Falle des Verschwindens der Summe einzeln verschwinden müssen. Dann sind aber auch alle n Gleichungen unserer Schar erfüllt. (Ganz entsprechend ist das Verfahren, welches Jacobi [N. 12, S. 7] anwendet.) Hieraus ersehen wir deutlich, daß man in diesem Falle, anders als bei Galilei, auszudrücken hat, daß die Arbeiten einzeln gleich Null sind, was man durch Anwendung der willkürlichen Faktoren erreicht. Diese Faktoren erfüllen eine Aufgabe rein algebraischer Art, und ihre wesentliche Eigenschaft ist die Willkürlichkeit. Wenn man ihnen trotzdem wie in den oben zitierten Ausführungen Delaunays die Bedeutung von Verschiebungen beilegt, so ist jede Beschränkung in der Wahl derselben unzulässig. Man ist ferner nicht genötigt, wegen der etwaigen Abhängigkeit der Kräfte vom Ort diese Verschiebungen unendlich klein zu nehmen, denn „für den Gleichungszustand ist es offenbar ganz gleichgiltig wie die Kräfte sich verändern **würden**, wenn eine Bewegung einträte. Von Wichtigkeit sind für die Beurteilung nur die Werte, welche in der Ruhelage gelten. Wir können also die Kräfte als konstante Größen ansehen, welche während der virtuellen Verschiebung ihre Werte bewahren.“ (Helmholtz Nr. 10, S. 279.) Am Ende dieser Betrachtung sehen wir mit einer gewissen Enttäuschung den alten Satz der Logik bestätigt, daß der Inhalt eines Begriffs oder einer Aussage dem Umfang umgekehrt proportional ist; denn der Umfang des im Sinne der oben gemachten Ausführungen angewendeten P. d. v. G. enthält alle denkbaren Massensysteme unter allen denkbaren Kraftverhältnissen. Sein Inhalt aber beschränkt sich auf die ziemlich banale Tatsache, daß eine beliebige Anzahl voneinander unabhängiger Massenpunkte sich ebenso verhält, wie wenn man jeden für sich ins Auge faßt. Doch ist dieser analytische Umweg zur exakten und allgemeinen Begründung des P. d. v. G. auf das Prinzip der Kräftezusammensetzung notwendig, und er führt, wie wir sogleich sehen werden, am Ende auf das Gebiet der Mechanik zurück.

Die mechanische Bedeutung des P. d. v. G. wird wieder hergestellt durch Ausschaltung der Verbindungskräfte.

Um dahin zu gelangen, müssen wir diejenigen Elemente wieder ausschalten, die wir zur Herleitung brauchten, und die, wie oben angedeutet, bei Galilei gar nicht vorkommen, weil er das P. d. v. G. nicht auf das Prinzip der Zusammensetzung der Kräfte aufbaut, nämlich die Verbindungs-

kräfte. Wir müssen diejenigen Kräfte wieder ausschalten, welche wir an den einzelnen materiellen Punkten, in die nach unserer Anschauung ein Körper zerfällt, außer den ursprünglichen an ihnen wirksamen noch anbringen müssen, damit sie sich auch weiter so verhalten, wie sie es vor ihrer Isolierung unter den Einwirkungen taten, die sie von seiten der andern Punkte oder von außen her erleiden. Diese Einwirkungen bezeichnen wir ganz allgemein mit dem Namen „Verbindungen“ und nennen demgemäß die Kräfte, durch welche wir sie ersetzen, „Verbindungskräfte“ zum Unterschiede von allen übrigen, die wir als „freie Kräfte“ bezeichnen wollen. Die Verbindungskräfte werden zunächst immer von derjenigen Größe und Richtung vorausgesetzt, die zur absoluten Aufrechterhaltung der durch sie vertretenen Verbindung gerade notwendig, aber auch nur eben hinreichend ist. Es geht daraus hervor, daß eine Bewegung eines der Punkte, welche senkrecht zu der an ihm angebrachten Verbindungskraft erfolgt, mit den Bedingungen verträglich sein muß, denen er unterworfen ist. Denn wäre dies nicht der Fall, so hätte die Verbindungskraft von vornherein eine Richtung erhalten müssen, die sie befähigt, diese Verschiebung zu verhindern, sie hätte also nicht auf ihr senkrecht stehen dürfen, was sie doch in Wirklichkeit tut. Eine solche Verschiebung ist also mit den Verbindungen verträglich oder, wie wir es in der Einleitung genannt haben, „möglich“. Die dabei von der Verbindungskraft geleistete Arbeit ist gleich Null. Indes müssen wir bei Systemen mit Verbindungen in der Regel die Verschiebungen unendlich klein wählen, wenn wir soviel als möglich auf dem Boden der Wirklichkeit bleiben wollen, denn wenn wir auch wie früher (S. 160) uns auch die Verbindungskräfte der Richtung nach unabhängig vom Ort denken können, so findet dies doch bei einer wirklich ausgeführten Verschiebung für gewöhnlich nicht statt, was wir uns etwa an dem Beispiel eines Punktes klar machen können, der auf einer Kugelfläche sich zu bewegen genötigt ist. Haben wir ferner zwei materielle Punkte, die so miteinander verbunden sind, daß ihr Abstand sich nicht ändern kann, so können wir uns ihre Verbindungslinie gezogen und die Punkte auf dieser als starr gedachten Linie unverrückbar befestigt denken. Die Kinematik lehrt dann, daß man jede unendlich kleine Verrückung dieser Linie auffassen kann als zusammengesetzt aus einer Elementarparallelverschiebung und einer Elementardrehung um einen ihrer Punkte. Die Verbindungskräfte, die wir anbringen müßten, sind nach dem Prinzip von der Actio und Reactio gleich und entgegengesetzt und wirken in der Verbindungslinie. Bei einer Elementarparallelverschiebung derselben heben sich die von ihnen geleisteten Arbeiten gegenseitig auf, bei einer Elementardrehung um einen Punkt der Verbindungslinie stehen die von den Angriffspunkten zurückgelegten Wegelemente senkrecht auf der Kraftrichtung, so daß die Arbeiten einzeln gleich Null

sind.[1]) Daraus folgt, daß die hier angebrachten Verbindungskräfte bei keiner möglichen Verschiebung Arbeit leisten können (ähnlich, aber nicht ganz so einfach beweist es Fourier [Nr. 7, S. 24]). Dasselbe gilt von mehreren Punkten, deren gegenseitige Lage unverändert gehalten wird, da man sie ja in Gruppen zu zweien zusammenfassen kann, und infolgedessen auch für den starren Körper, der ja als Spezialfall davon aufgefaßt werden kann. Endlich ließe sich noch dartun, daß diejenigen Verbindungskräfte bei einer möglichen unendlich kleinen Verschiebung keine Arbeit leisten, welche man sich an Körpern wirksam denkt, die stets miteinander in Berührung bleiben. Die drei hier angeführten Spezialfälle (I. der einzelne Punkt ist in seiner Bewegungsfreiheit beschränkt; II. Punkte sind starr miteinander verbunden; III. Körper berühren einander) dienen in den Lehrbüchern in der Regel als Repräsentanten für alle Arten von Verbindungskräften, die man sich an materiellen Punkten angebracht denken kann. Da nun die Gesamtarbeit aller Kräfte, wie oben bewiesen, bei jeder, also auch bei einer möglichen unendlich kleinen Verschiebung gleich Null ist, und da ferner die Arbeit der Verbindungskräfte für sich bei einer solchen gleich Null ist, so muß auch die nun nur noch übrig bleibende Arbeit der freien Kräfte in diesem Falle gleich Null sein. Damit hat das P. d. v. G. die mechanische Bedeutung wiedererlangt, die es bei Galilei besessen hatte. Im Anschluß daran wird von den Verbindungskräften ausgesagt, daß „ihre Wirksamkeit auch dargestellt und ersetzt werden kann durch gewisse Bedingungsgleichungen, welchen die Koordinaten der materiellen Punkte unterworfen sein sollen" (Ritter Nr. 26, S. 170) und dann

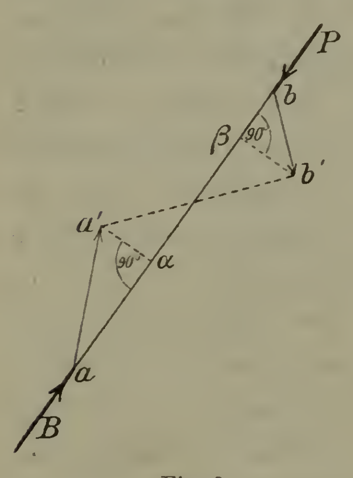


Fig. 2.

1) Dagegen bleibt die Arbeit nicht Null, wenn die Angriffspunkte ihren Abstand ändern. In obenstehender Figur mögen die Angriffspunkte der Kräfte P infolge einer unendlich kleinen virtuellen Verschiebung von a nach a' bezw. von b nach b' rücken. Dann sind $P\overline{a\alpha}$ und $P\overline{b\beta}$ die dabei geleisteten Arbeiten. Ihre Summe beträgt also $P(\overline{a\alpha}+\overline{b\beta})$. Für $(a\alpha+b\beta)$ kann man setzen $(\overline{ab}-\overline{\alpha\beta})$. Nun zeigt die Differentialrechnung, daß man nur unendlich kleine Größen zweiter Ordnung vernachlässigt, wenn man eine Strecke mit ihrer Projektion auf eine Richtung vertauscht, die mit der der Strecke einen unendlich kleinen Winkel bildet. Man darf deshalb $\overline{a'b'}$ für $\overline{\alpha\beta}$ setzen, so daß der Ausdruck für die Arbeit A die Form annimmt: $A = P(\overline{ab}-\overline{a'b'})$. Der in der Klammer stehende Wert ist aber die Abstandsänderung der Angriffspunkte, und man erhält also die Arbeit, wenn man eine der Kräfte mit der Abstandsänderung der Angriffspunkte multipliziert (nach Delaunay, Nr. 5).

das P. d. v. G. in der Form ausgesprochen: „Wenn ein System von materiellen Punkten, für deren Koordinaten gewisse Bedingungsgleichungen vorgeschrieben sind, im Gleichgewichtszustande sich befindet, so wird die bei einer fingierten möglichen, d. h. mit jenen Bedingungen vereinbaren Verschiebung des Systems von den wirkenden Kräften verrichtete Arbeitssumme stets gleich Null sein.“ (Ritter Nr. 26, S. 171.)

Der exakte Beweis für alle Arten von Verbindungen in Lagranges Funktionentheorie.

Wie wir bereits angedeutet haben, ist der Beweis der Richtigkeit dieses Satzes hier nur für Spezialfälle von Verbindungen geführt, was allerdings für die Zwecke der (technischen) Lehrbücher genügt. Dagegen finden wir in der Funktionentheorie Lagranges (Nr. 16, S. 640) einen exakten und allgemeinen Beweis desselben, dessen hauptsächlichste Punkte sich in Kürze und unter Verwendung der jetzt üblichen mathematischen Schreibweise wie folgt darstellen lassen. Steht eine Kraft P immer auf einer Fläche $F(x, y, z) = w = 0$ senkrecht, so sind ihre Komponenten gleich $P\frac{\partial w}{\partial x}$, $P\frac{\partial w}{\partial y}$, $P\frac{\partial w}{\partial z}$. Es verhalten sich also auch die drei Komponenten der Kraft, die die Fläche auf einen sich in ihr bewegenden Körper ausübt, wie $\frac{\partial w}{\partial x} : \frac{\partial w}{\partial y} : \frac{\partial w}{\partial z}$, denn „es ist klar, daß die Richtung der Wirkung der Fläche auf den Körper oder vielmehr des Widerstandes, den sie ihm entgegensetzt, nur auf der Fläche senkrecht stehen kann“.[1] Dasselbe Resultat erhält man auch, wenn man ganz von der Fläche absieht und ihre Gleichung ($w = 0$) bloß als eine durch die Aufgabe gegebene Bedingungsgleichung betrachtet. Eine solche Bedingungsgleichung findet statt, wenn zwei oder mehr Massenpunkte durch einen Faden verbunden sind, derart, daß dieser Faden vom ersten Körper M aus über eine feste Rolle führt, von dieser zum ersten Körper zurück (also etwa über eine zweite bewegliche unmittelbar mit dem Körper verbundene Rolle), von da wieder nach der festen Rolle, wieder nach dem Körper, kurz beliebig oft zwischen (fester) Rolle und Körper hin und her, dann ebenso die anderen Rollen und Körper beliebig oft umschlingt, bis er am letzten Körper befestigt ist. Für zwei Punkte lautet diese Bedingung:

$$f(x, y, z, \xi, \eta, \zeta) = m\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}$$
$$+ n\sqrt{(\xi-\alpha)^2 + (\eta-\beta)^2 + (\zeta-\gamma^2} - g = 0,$$

wo x, y, z die Koordinaten des ersten Punktes, a, b, c die Koordinaten der zu ihm gehörigen festen Rolle, m die doppelte Zahl der um die an ihm befestigte lose Rolle gelegten Fadenteile bedeutet und $\xi, \eta, \zeta, \alpha, \beta, \gamma, n$ die

1) Auf diesen Satz kommen wir auf S. 178 dieser Arbeit zurück.

entsprechenden Größen für den zweiten Punkt, während g die konstante Länge des ganzen Fadens angibt. Die Theorie der Oskulation der Kurven zeigt, daß man irgend eine andere zwischen denselben Koordinaten gegebene Gleichung $F(x, y, z, \xi, \eta, \zeta \ldots) = 0$ für gegebene $x, y \ldots$ durch passende Bestimmung der Konstanten zu einer Berührung erster Ordnung mit obiger Gleichung F bringen kann, so daß also für diese Werte nicht nur die Funktionen, sondern auch alle ihre ersten partiellen Ableitungen miteinander übereinstimmen, d. h. man kann jede durch eine Gleichung $F = 0$ repräsentierte Bedingung für unendlich kleine Verschiebungen stets durch ein dem oben beschriebenen entsprechendes Lagrangesches Flaschenzugsystem ersetzen. Nun kann man sich an einem Massenpunkt mehrere Flaschenzugsysteme zugleich wirksam denken, die bezw. die Bedingungsgleichungen F_{I}, F_{II}, $F_{\mathrm{III}}, \ldots$ vertreten, dann hat man den obigen Ausführungen entsprechend $\lambda_{\mathrm{I}} \frac{\partial F_{\mathrm{I}}}{\partial x_1}$; $\lambda_{\mathrm{I}} \frac{\partial F_{\mathrm{I}}}{\partial y_1}$; $\lambda_{\mathrm{I}} \frac{\partial F_{\mathrm{I}}}{\partial z_1}$ als Komponenten der am Punkt 1 angreifenden, von der Verbindung I herrührenden Verbindungskraft, wenn man sich unter λ_{I} einen Proportionalitätsfaktor vorstellt, auf dessen mechanische Bedeutung wir hier nicht einzugehen brauchen. Ein Körper möge nun aus n Massenpunkten $M_{1, 2, \ldots, n}$ bestehen, deren Koordinaten $x_{1, 2, \ldots, n}$, $y_{1, 2, \ldots}$, $z_{1, 2, \ldots}$ sein mögen. $X_{1, 2, \ldots, n}$, $Y_{1, 2, \ldots, n}$, $Z_{1, 2, \ldots, n}$ seien die Komponenten der Resultierenden der an jedem einzelnen wirkenden „freien" Kräfte (siehe S. 161 dieser Arbeit). Es mögen B Bedingungen $F_{\mathrm{I, II}, \ldots, B} = 0$ bestehen. Da nun an jedem einzelnen der Massenpunkte Gleichgewicht zwischen den „freien" und den „Verbindungs"-Kräften stattfinden muß, so erhalten wir die Gleichungen

$$X_1 = \lambda_{\mathrm{I}} \frac{\partial F_{\mathrm{I}}}{\partial x_1} + \lambda_{\mathrm{II}} \frac{\partial F_{\mathrm{II}}}{\partial x_1} + \cdots + \lambda_B \frac{\partial F_B}{\partial x_1}; \quad Y_1 = \lambda_{\mathrm{I}} \frac{\partial F_{\mathrm{I}}}{\partial y_1} + \cdots + \lambda_B \frac{\partial F_B}{\partial y_1}; \quad Z_1 = \lambda_{\mathrm{I}} \frac{\partial F_{\mathrm{I}}}{\partial z_1} + \cdots + \lambda_B \frac{\partial F_B}{\partial z_1};$$

$$X_2 = \lambda_{\mathrm{I}} \frac{\partial F_{\mathrm{I}}}{\partial x_2} + \lambda_{\mathrm{II}} \frac{\partial F_{\mathrm{II}}}{\partial x_2} + \cdots + \lambda_B \frac{\partial F_B}{\partial x_2}; \quad Y_2 = \lambda_{\mathrm{I}} \frac{\partial F_{\mathrm{I}}}{\partial y_2} + \cdots + \lambda_B \frac{\partial F_B}{\partial y_2}; \quad Z_2 = \lambda_{\mathrm{I}} \frac{\partial F_{\mathrm{I}}}{\partial z_2} + \cdots + \lambda_B \frac{\partial F_B}{\partial z_2};$$

$$\vdots$$

$$X_n = \lambda_{\mathrm{I}} \frac{\partial F_{\mathrm{I}}}{\partial x_n} + \lambda_{\mathrm{II}} \frac{\partial F_{\mathrm{II}}}{\partial x_n} + \cdots + \lambda_B \frac{\partial F_B}{\partial x_n}; \quad Y_n = \text{usw.}$$

Multipliziert man diese Gleichungen bezw. mit den willkürlichen Koeffizienten $\frac{dx_1}{dt}$, $\frac{dy_1}{dt}$, $\frac{dz_1}{dt}$, $\frac{dx_2}{dt}$, $\cdot\cdot$ usw. und addiert sie, so erhält man:

$$\sum_{X_1 Y_1 Z_1 x_1 y_1 z_1}^{X_n Y_n Z_n x_n y_n z_n} \left(X \frac{dx}{dt} + Y \frac{dy}{dt} + Z \frac{dz}{dt}\right) = \sum_{\lambda_{\mathrm{I}} F_{\mathrm{I}}}^{\lambda_B F_B} \sum_{x_1 y_1 z_1}^{x_n y_n z_n} \left(\frac{\partial F}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial F}{dz} \frac{dz}{dt}\right) \lambda.$$

Setzen wir nun die Verschiebungen so voraus, daß sie mit den ange-

nommenen B Bedingungen verträglich sind, so bestehen die B Gleichungen $F_{\mathrm{I, II, III}, \ldots, B} = 0$. Dann sind aber auch die auf der rechten Seite der obigen Gleichung stehenden partiellen Ableitungen der einzelnen F sämtlich gleich Null. Dadurch erhält die ganze rechte Seite den Wert Null, so daß unsere Gleichung die Form erhält:

$$\sum_{X_1 Y_1 Z_1 x_1 y_1 z_1}^{X_n Y_n Z_n x_n y_n z_n} \left(X \frac{dx}{dt} + Y \frac{dy}{dt} + Z \frac{dz}{dt} \right) = 0 .$$

Dies ist der analytische Ausdruck des P. d. v. G., wenn man es in der oben nach Ritter wiedergegebenen Fassung ausspricht. Nur daß durch die Division mit dt wirklich Geschwindigkeiten, nicht bloß Verschiebungen auftreten. Wir heben an dieser Stelle nochmals hervor, daß man zum Beweis des P. d. v. G. auf Grund des Prinzips der Kräftezusammensetzung die Verschiebungen als ganz willkürlich zu betrachten hat. Mögliche und unendlich kleine Verschiebungen treten erst auf, wenn man dem Satze eine für die Anwendung zweckmäßige Form geben will. Wir hätten deshalb die letzten Untersuchungen auch in den von den Anwendungen des P. d. v. G. handelnden Teil unserer Arbeit verweisen können, allein viele betrachten erst den in dieser letzteren Form ausgesprochenen Satz als das eigentliche P. d. v. G.

Der starre Körper wird als Grundgebilde betrachtet.

In den vorstehenden Ausführungen haben wir verschiedene Verbindungen von materiellen Punkten betrachtet, unter denen sich als Spezialfall der starre Körper befand. Dieser Spezialfall hat in der wissenschaftlichen Mechanik zur Betrachtung räumlicher Kräftesysteme geführt, die ihrerseits wieder die Veranlassung zur Einführung ganz neuer Begriffe wie „Kräftepaar", „Trägheitsmoment", „Trägheitsellipsoid" und zur Aufstellung einer eigens dem starren Körper angepaßten Theorie des Gleichgewichtes und der Bewegung gewesen ist, so daß man wohl von einer besonderen Mechanik des starren Körpers reden kann. Auch in dieser Mechanik hat das P. d. v. G. seinen Platz und seine Beweise erhalten. Die Theorie der räumlichen Kräftesysteme lehrt, daß man auf unendlich viele Arten jedes derartige an einem starren Körper wirkende System auf zwei Kräfte reduzieren kann, deren Richtungen im allgemeinen windschief sind. Weiter wird gezeigt, daß für den Spezialfall des Gleichgewichts diese resultierenden Kräfte in dieselbe Gerade fallen und entgegengesetzt gleich sein müssen. Sie greifen an zwei Punkten eines starren Körpers an, also an zwei Punkten, deren Abstand unveränderlich ist, sind ferner gleich groß, aber entgegengesetzt gerichtet und liegen in der Verbindungslinie ihrer Angriffspunkte. Für zwei derartige Kräfte haben wir oben schon bewiesen, daß ihre Arbeit bei jeder möglichen unendlich kleinen Verschiebung gleich Null ist. Wenn wir also zeigen können, daß die beiden Resultierenden imstande sind, hinsichtlich der Arbeits-

leistung die ursprünglich vorhandenen Kräfte zu ersetzen, so ist damit der Beweis des P. d. v. G. für den starren Körper geführt. Man gelangt zu den beiden resultierenden Kräften durch wiederholte Anwendung und Kombination zweier Operationen. I. Man verschiebt den Angriffspunkt einer Kraft in ihrer Richtung. II. Man ersetzt Kräfte, die in demselben Punkt angreifen, durch ihre Resultierende, oder man zerlegt umgekehrt eine Kraft in Komponenten. Man kann nämlich im Raum einen Punkt und eine Ebene annehmen, alle Kräfte mit der Ebene zum Schnitt bringen und jede in zwei Komponenten zerlegen, von denen die eine in der Ebene liegt, während die andere durch den angenommenen Punkt geht. Die in der Ebene liegenden Kräfte einerseits und die durch den Punkt gehenden andererseits lassen sich dann weiter zu je einer Resultierenden zusammenfassen. Daß durch die unter II genannte Operation die bei einer Verrückung geleistete Arbeit keine Veränderung erfährt, ist bereits bewiesen worden. Für die unter I genannte ergibt es sich wie folgt. Nebenstehende Figur stelle einen starren Körper dar, an dem die drei gleich großen Kräfte F, F_{I}, F_{II} wirken. Offenbar sind für jede unendlich kleine Veränderung des Körpers die Arbeiten der Kräfte F_{I}, F_{II} einander gleich, aber mit entgegengesetzten Vorzeichen behaftet. Dasselbe haben wir oben für die Kräfte F und F_{II} bewiesen. Hieraus folgt, daß die Arbeiten der Kräfte F und F_{I} einander gleich sind und dasselbe Vorzeichen haben, daß also die Arbeit einer Kraft sich nicht ändert, wenn man ihren Angriffspunkt nach irgend einem Punkt ihrer Richtung verlegt (nach DELAUNAY Nr. 5, S. 236). Auf denselben Prinzipien beruht der Beweis, den FOURIER (Nr. 7, S. 29) gibt, doch führt er das ursprünglich gegebene Kräftesystem nicht wie wir auf ein Paar, sondern auf drei Paar entgegengesetzt gleicher Kräfte zurück, von der Voraussetzung ausgehend: *„qu'en tout equilibre d'un corps dur, il se trouve toujours un plan, une ligne et un point sollicités par deux forces égales et contraires."* Weniger einfach und übersichtlich ist das Beweisverfahren von SCHEFFLER (Nr. 29, S. 207). Dieser geht von der kinematischen Betrachtung aus, daß sich die allgemeinste Bewegung des starren Körpers als aus sechs Elementarbewegungen zusammengesetzt auffassen läßt. Soll der Körper im Gleichgewicht sein, so dürfen die Kräfte zu keiner dieser sechs Bewegungen Anlaß geben und müssen daher die bekannten sechs Gleichgewichtsbedingungen erfüllen. Aus letzteren setzt nun SCHEFFLER die Gleichung zusammen, welche der analytische Ausdruck für das P. d. v. G. ist, indem er dabei denselben Weg in umgekehrter Richtung durchläuft, auf welchem andere z. B. DELAUNAY aus dem P. d. v. G. die sechs Gleichgewichtsbedingungen ableiten. Wie wir

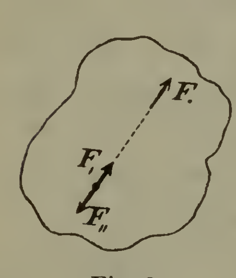


Fig. 3.

übrigens den starren Körper als Spezialfall des Systems von verbundenen Massenpunkten betrachten konnten, so daß der Beweis des P. d. v. G. in dem für dieses System geführten mit enthalten war, so können wir auch umgekehrt den materiellen Punkt als Spezialfall des starren Körpers auffassen und dann bei ihm auf einen besonderen Beweis des P. d. v. G. verzichten. Da die materiellen Punkte aber die Elemente sind, aus denen sich das beliebige materielle System aufbaut, so kann man also dieses letztere auf den starren Körper zurückführen.

III. Beweise, die auf der Zurückführung aller Verbindungen auf Kombinationen einfacher Maschinen beruhen.

Der Fourier'sche Hebelbeweis und die Duhamel'schen Gelenkstangen.

Auch wenn man das Prinzip der Kräftezusammensetzung nicht zur Herleitung des P. d. v. G. für das beliebige materielle System heranzieht, kann man einen Spezialfall des starren Körpers hierzu benutzen, nämlich den Hebel. Dies tut Fourier (Nr. 7, S. 37). Bewegt sich ein Punkt P auf einer Geraden p mit der Geschwindigkeit π, so kann man, wie Fourier zeigt, durch eine passend gewählte Kombination von Hebeln einen beliebigen anderen Punkt R zwingen, sich auf der gegebenen Geraden r mit der gegebenen Geschwindigkeit ϱ zu bewegen. Folglich würde sich an irgend einer möglichen Bewegung eines Systems von Massenpunkten nichts ändern, wenn wir statt der wirklich vorhandenen Verbindungen ein derartiges Hebelsystem anbringen würden. Fourier setzt den Satz voraus, daß die an einem Hebel angebrachten Kräfte keine Bewegung desselben verursachen, wenn die Summe der von ihnen bei einer möglichen unendlichen kleinen Bewegung geleisteten Arbeit gleich Null ist. Unter dieser Voraussetzung würde also auch an unserm Hebelsystem keine Bewegung eintreten. Daher können die Kräfte auch diejenige mögliche unendlich kleine Verschiebung nicht hervorrufen, für die wir das Hebelsystem eingerichtet haben. Wenn wir nun für jede mögliche Verschiebung in derselben Weise verfahren, so finden wir, daß unter der gemachten Voraussetzung keine von ihnen, also überhaupt keine Verschiebung von den Kräften erzeugt werden kann. Fourier stützt sich hier mit seinen Ausführungen auf den Hebel.[1]) Man wird also letztere nach dem in der Einleitung Gesagten nur dann als Beweis gelten lassen können, wenn man das Hebelprinzip für evidenter ansieht als das P. d. v. G. oder es diesem aus anderen Gründen voranstellt. Jedenfalls aber läßt sich zugunsten Fouriers anführen, daß er verwickelte Verhältnisse übersichtlicher macht, indem er alle möglichen Arten von Verbindungen nach einem Schema durch eine einfache Anordnung ersetzt. Nicht ganz so einfach verfährt

1) Auch Lagrange skizziert einen Beweis des P. d. v. G. auf Grund des Hebelprinzips (Nr. 14, S. 34)

Duhamel (Nr. 36 S. 97). Er ersetzt alle Verbindungen dadurch, daß er jeden Punkt mit einem andern durch zwei Graden von konstanter Länge verbindet, die gezwungen sind, sich auf einer bestimmten Fläche zu schneiden. Fourier hat auch schon an die Anwendung von Flaschenzügen zur Erreichung desselben Zweckes gedacht (Nr. 7, S. 43), ein Verfahren, das wir in höchst geistreicher Ausbildung nunmehr bei Lagrange kennen lernen wollen.

Der Lagrange'sche Flaschenzugbeweis.

Bei Besprechung desjenigen Beweises für das P. d. v. G., den Lagrange in seiner Funktionentheorie gibt, hatten wir gesehen, daß er alle möglichen Arten von Verbindungskräften durch Systeme von Flaschenzügen ersetzt. In der „analytischen Mechanik" (und schon vorher in einem Aufsatze im *Journal de l'Ecole polytechnique* [Nr. 15]) tut er dies mit allen Kräften, die auf die einzelnen materiellen Punkte des Systems wirken. Er sucht das größte gemeinschaftliche Maß derselben und hängt eine ihm gleichgemachte Last an das freie Ende des Fadens, der um die feste und bewegliche Rolle jedes einzelnen Flaschenzuges so oft herumgelegt ist, als das gemeinschaftliche Maß in der durch den betreffenden Flaschenzug vertretenen Kraft enthalten ist.[1] „Auf diese Weise wird dasselbe Gewicht vermittels des Seiles, welches alle Flaschenzüge umfaßt, verschiedene Kräfte erzeugen, welche auf die verschiedenen Punkte des Systems wirken und zwar wirkt jede dieser Kräfte in der Richtung, in welcher das Seil von dem betreffenden beweglichen Flaschenzug in den verschiedenen Windungen zu dem zugehörigen festen läuft, und jede dieser Kräfte verhält sich zu dem am Ende des Seiles wirkenden Gewicht wie die Zahl der Windungen, die den betreffenden Flaschenzug trägt, zur Einheit.[2] Diese Kräfte werden also selbst durch die Zahl der Windungen dargestellt werden, welche zusammen wirken, um sie bezüglich durch ihre Spannung zu erzeugen. Es ist nun offenbar, daß das Gewicht, wenn das durch diese verschiedenen Kräfte gezogene System im Gleichgewicht bleiben soll, infolge einer beliebigen unendlich kleinen Verrückung der Punkte des Systems nicht fallen darf, denn da ein Gewicht von selbst schon immer zu fallen strebt, so wird es, wenn eine Verrückung des Systems möglich ist, die ihm zu fallen gestattet, von selbst schon fallen und seinerseits diese Verrückung in dem System erzeugen (vgl. Mach Nr. 17, S. 73: „Es geschieht nichts, was nicht geschehen kann"). Wir bezeichnen mit $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ die unendlich kleinen Strecken, welche vermöge dieser Ver-

---

1) Wir getrauen uns nicht das Beweisverfahren besser darzulegen als Lagrange selbst und zitieren daher das folgende wörtlich nach Nr. 14, S. 21.

2) Statt „Zahl der Windungen" müßte es wohl heißen „doppelte Zahl der Windungen" oder auch „Zahl der Flaschenzugseile". Im Französischen steht hier *„cordons"*, was von Servus an späterer Stelle (Zeile 9 von unten) auch richtig durch „Flaschenzugseile" wiedergegeben wird.

rückung die verschiedenen Punkte des Systems in der Richtung der Kräfte, welche sie ziehen, durchlaufen würden, und mit P, Q, R, ... die bezüglichen Zahlen der Flaschenzugseile, die an diesen Punkten angebracht sind und durch ihre Spannung diese Kräfte erzeugen. Zunächst ist klar, daß die Strecken $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ zugleich auch die Strecken angeben, um welche die beweglichen Flaschenzüge sich den festen, welche zu ihnen gehören, bei dieser Verrückung nähern würden, und daß diese Annäherungen die Stücke des Seiles, welches sie umfaßt, um die Größen $P\alpha$, $Q\beta$, $R\gamma, \ldots$ verkürzen würden. Da nun die ganze Länge des Seiles sich nicht ändern soll, so wird das an seinem Ende wirkende Gewicht um die Strecke $P\alpha + Q\beta + R\gamma \ldots$ fallen. Also muß, wenn zwischen den durch die Zahlen P, Q, R, ... dargestellten Kräften Gleichgewicht vorhanden sein soll, die Gleichung bestehen $P\alpha + Q\beta + R\gamma \cdots = 0$ und diese Gleichung bildet eben den analytischen Ausdruck des allgemeinen P. d. v. G." „Das P. d. v. G., das wir hier so für unter sich kommensurable Kräfte bewiesen haben, wird auch für beliebige inkommensurable Kräfte gelten, da man weiß, daß jeder Satz, den man für kommensurable Größen beweisen kann, auf gleiche Weise durch die Zurückführung aufs Absurde bewiesen werden kann, wenn diese Größen inkommensurabel sind." Dieser Beweis besitzt noch in erhöhtem Maße den Vorzug der Übersichtlichkeit, dem wir vorhin dem Fourier'schen nachgerühmt haben, denn er lenkt unsere Aufmerksamkeit auf das Verhalten eines einzigen Gewichtes. Man wird ihm auch große Allgemeinheit zubilligen müssen, wenn man sich daran erinnert, daß wir an früherer Stelle die Ersetzbarkeit aller durch Gleichungen ausdrückbarer Bedingungen durch Lagrange'sche Flaschenzüge (nach Nr. 16) nachgewiesen haben. Doch müssen wir hier wieder darauf hinweisen, daß er unmittelbare Beweiskraft nur für den hat, der wie Lagrange das „Prinzip der Rollen" ohne weiteres als richtig anerkennt. Für solche, die es nicht tun, verfehlt der Beweis den Zweck, den Lagrange mit seiner Aufstellung verbindet, nämlich das P. d. v. G. vom Prinzip der Kräftezusammensetzung unabhängig zu machen. „Erstens nämlich wird angenommen, daß Kräfte, die in einer und derselben geraden Linie (die Rollen unendlich klein angenommen) auf ein starres Massensystem einwirken, sich in bezug auf diese Wirkung algebraisch addieren lassen, und zweitens, daß die Größe einer Kraft an sich nicht verändert wird, wenn man derselben durch irgend welche äußere Hilfsmittel eine veranderte Richtung gibt" (Wundt Nr. 34, S. 321). Auch Streintz (Nr. 30, S. 124) findet, „daß in dem der Ableitung des P. d. v. G. zugrunde gelegten bekannten, aus guten Gründen längst aufgegebenen theoretischen Flaschenzugbeweise die Gültigkeit des Zusammensetzungsprinzips doch unbewußt vorausgesetzt wird" (vgl. auch Streintz Nr. 30, S. 140). Man sieht

eigentlich nicht so recht ein, weshalb Lagrange das Zusammensetzungsprinzip bei der Begründung der P. d. v. G. vermeiden will. Er schafft den in logischer Beziehung allerdings stets etwas fatal gebliebenen Kraftbegriff ja doch nicht aus den Grundlagen der Mechanik heraus, wie dies Hertz tut. Auch das Prinzip der Unabhängigkeit der Wirkung verwendet er oft genug, z. B. in seinem eigenen eben zitierten Beweise. Damit sind aber die Grundlagen für das Prinzip der Kräftezusammensetzung vollkommen gegeben, so daß es sich auch für Lagrange einfach als Konsequenz der gemachten Voraussetzungen ergibt, eine Konsequenz, die er zu ziehen und zu verwenden merkwürdigerweise Anstand nimmt.

Der Poisson'sche Beweis.

Der Lagrange'sche Beweis ist, wie Streintz sagt, aus guten Gründen verlassen, doch hat man die darin enthaltenen wertvollen Elemente herausgeschält und mit dem Prinzip der Kräftezusammensetzung zu einem neuen Beweise kombiniert, den wir bei Poisson (Nr. 24) finden. Dort wird das P. d. v. G. zunächst mit Hilfe des Prinzips der Kräftezusammensetzung in der früher behandelten Weise für einen materiellen Punkt bewiesen, der zunächst als frei, dann aber auch als durch feste Flächen etc. in seiner Bewegungsfreiheit beschränkt angenommen wird. Aus solchen Punkten setzt Poisson das allgemeine System zusammen, indem er die dazwischen wirksamen inneren Kräfte nach dem Muster Lagranges durch Flaschenzüge ersetzt (nur daß er statt der unendlich kleinen Rollen Ringe nimmt, durch die er den Faden zieht). Wir bezeichnen mit $\delta(m, m')$, $\delta(m', m'')$, ... die durch irgend eine unendlich kleine Verschiebung entstehende Abstandsänderung der Punkte m und m', m' und m'', ..., mit P, P', ... die Resultierenden der an den Punkten m, m', ... angreifenden freien Kräfte; mit p, p', ... die Verschiebungen ihrer Angriffspunkte, gemessen nach der Kraftrichtung; und mit $[m, m']$, $[m', m'']$, ... die Zug- oder Druckkräfte, welche die zur Verbindung von m und m', m' und m'', ... angebrachten Flaschenzüge ausüben.[1]) Diese Zug- oder Druckkräfte liegen paarweise in derselben Aktionslinie, so daß nach dem, was wir früher von solchen Kräften bewiesen haben,[2]) die Arbeit des beispielsweise zwischen m und m' wirksamen Paares bei einer unendlich kleinen Verschiebunggleich $[m, m']\ \delta\ (m, m')$ ist, was Poisson durch ein etwas abweichendes Verfahren zeigt. Indem Poisson die Gleichungen addiert, die das P. d. v. G. für die einzelnen Punkte liefert, erhält er

$$Pp + P'p' + \cdots + [m, m']\ \delta\ (m, m') + [m', m'']\ \delta\ (m'\ m'') + \cdots = 0.$$

In diese Gleichung treten also auch die Arbeiten der inneren Kräfte ein,

1) Nicht etwa die „Ausdehnung oder Zusammenziehung", wie die Stern'sche Übersetzung das französische *„tensions ou contractions"* wiedergibt.

2) Siehe die Anmerkung S. 162.

weil wir das System in Anpassung an die Beschaffenheit natürlicher Körper nicht als starr ansehen und daher auch unendlich kleine Verrückungen als möglich zulassen, welche die Abstände der Punkte, wenn auch nur wenig, verändern. Wenn wir aber zur bisher gemachten Voraussetzung der Starrheit zurückkehren und die Verschiebungen auf die dann noch möglichen beschränken, so verschwinden diese Arbeitsausdrücke wieder, wodurch die Gleichung der P. d. v. G. ihre gewöhnliche Form annimmt:

$$Pp + P'p' + \cdots = 0.$$

IV. Man berücksichtigt beim P. d. v. G. mehr die wahre Natur der Verbindungen.

Die Mechanik hatte die mathematische Form zu sehr in den Vordergrund gerückt.

Das Interessanteste an den Poisson'schen Ausführungen ist, daß er zunächst Verbindungen in Betracht zieht, die nicht absolut unveränderlich sind. Darin liegt eine Annäherung an die in der Natur vorliegenden Verhältnisse. Die Mechanik hatte sich seit fast zweihundert Jahren damit beschäftigt, das aus der Erfahrung stammende Tatsachenmaterial zu bearbeiten, das ihr ihre Väter mit auf den Weg gegeben hatten. Gerade das P. d. v. G. hatte der Mathematik, „der Stenographie des Denkens" (nach einem populären Schriftsteller) Eingang in die Mechanik verschafft, und sie hatte mit Hilfe der oft eigens geschaffenen mathematischen Methoden ihre Aufgabe auch wirklich bewältigt, war aber dabei nicht immer mit der fortschreitenden experimentellen Naturwissenschenschaft in Fühlung geblieben, sondern hatte die mathematischen Methoden, die ihr doch nur Mittel zum Zweck hätten sein sollen, vielleicht oft zu sehr in den Vordergrund ihres Interesses gerückt.[1]) So kommt es, daß Lagrange sich nur mit Verbindungen beschäftigt, deren Wirksamkeit durch Gleichungen darstellbar ist. Die Theorie der Gleichungen war ihm ein vertrautes Gebiet und er vernachlässigt deshalb den Umstand, daß der Idealfall der starren Verbindung, den er notwendig voraussetzen muß, in der Natur niemals anzutreffen ist. Erst verhältnismäßig spät vermochten sich Bestrebungen Geltung zu verschaffen, die auf eine bessere Anpassung der mechanischen Theorie an die Resultate der mit verfeinerten Hilfsmitteln angestellten Naturbeobachtung dringen, Bestrebungen, die zur wissenschaftlichen Ausbildung der Elastizitätslehre geführt haben und zu den damit in Zusammenhang stehenden, von Helmholtz angestellten Betrachtungen über das P. d. v. G., mit denen wir uns bald beschäftigen werden.

---

1) Man denke z. B. an das Wort Lagranges (*Theorie des fonct. analyt. Ed. IV, partie 3, pag. 337, S. 1*): *Ainsi on peut regarder la mécanique comme une géometrie à quatre dimensions et l'analyse mécanique comme une extension de l'analyse géometrique.*

Fourier und Gauss verlangen eine Änderung in der Fassung des P. d. v. G.

Der erste Schritt zu dieser „Rückkehr zur Natur" geschieht, was das P. d. v. G. betrifft, in dem schon öfter zitierten Aufsatz Fouriers (Nr. 7, S. 30). *„Comme il arrive souvent"* heißt es dort *„que les points du système s'appuient seulement sur les obstacles fixes, sans y etre attachés, il est évident, qu'il y a des déplacements possibles, qui ne satisfont pas aux équations de condition: on voit encore que par ces déplacements le moment des resultantes est nécessairement positif . . . Ainsi la somme des momens des forces appliquées est positive pour tous les déplacemens de cette espèce."* Mit Rücksicht darauf heißt es dann (S. 53): *„Il n'est pas necessaire, que le moment soit nul pour que le corps reste en équilibre, il suffit, que le moment ne soit negatif pour aucun déplacement possible, c'est à dire que de toutes les situations, qui conviennent au mobile, il n'y en ait aucune vers laquelle il soit porté."* Zum Verständnis der Worte Fouriers sei bemerkt, daß das Wort *„moment"* bei ihm (ähnlich wie bei Galilei) dem deutschen „Arbeit" entspricht, und daß er die damit verbundenen Bezeichnungen *„positif"* und *„negatif"* stets umgekehrt gebraucht, wie dies sonst üblich ist. Auf genau denselben Gedanken ist dreißig Jahre später auch Gauss verfallen, wahrscheinlich ohne die Fourier'sche Schrift zu kennen, da er an der betreffenden Stelle (Nr. 9, S. 234 Anm.) keine Quellenangabe macht. Ein einfaches Beispiel soll uns verdeutlichen, was gemeint ist. Wenn ein nur der Schwere unterworfener Körper auf einer horizontalen Tischplatte liegt, so befindet er sich im Gleichgewicht. Die Tischplatte verhindert nur eine Abwärtsbewegung des Körpers, während sie eine Aufwärtsbewegung gestattet. Bei einer solchen Aufwärtsbewegung würde aber die Schwere (nach Fouriers Bezeichnung) positive Arbeit leisten. Trotz des bestehenden Gleichgewichts wäre also im Widerspruch zum P. d. v. G. die bei einer möglichen Verschiebung geleistete Arbeit nicht gleich Null. Diesen Widerspruch wollen Fourier und Gauss beseitigen, indem sie beim Aussprechen des P. d. v. G. zu den Worten „gleich Null" den Zusatz machen „oder positive" (Fourier) bezw. „oder negative" (Gauss). Ich möchte hier nebenbei ein Analogon zu diesen Verhältnissen erwähnen, das sich in der Wärmelehre bietet und dessen flüchtige Skizze hier die Stelle eines zweiten Beispiels vertreten soll. Der zweite Hauptsatz der mechanischen Wärmetheorie lehrt, daß bei allen in der Natur vor sich gehenden Prozessen die Entropie (eine Größe, auf deren Erläuterung wir uns hier nicht einlassen können) stets eine Zunahme erfährt. Wenn nun die Natur des betreffenden Falles nur solche Zustandsänderungen gestattet, bei denen die Änderung der Entropie gleich Null oder negativ wäre, so ist eine Zustandsänderung überhaupt nicht möglich. Es herrscht also Wärmegleichgewicht. (Näheres darüber findet man bei Planck, Vorlesungen über Thermodynamik, Leipzig 1897.)

Wir halten die von Fourier und Gauss vorgeschlagene Änderung für überflüssig.

Uns scheint der Widerspruch gegen das P. d. v. G. nur ein scheinbarer und der Zusatz für die Mechanik nicht erforderlich zu sein. Wir verstehen unter einer „möglichen" Verschiebung eine solche, welche mit den Bedingungen des Systems verträglich ist. In unserm ersten Beispiel ist es eine wesentliche Bedingung, daß der Körper auf dem Tisch liegt; wenn wir ihn abheben, so zerstören wir die ganze Verfassung unseres Systems und verändern seine Bedingungen vollständig. Wenn wir, um ein anderes Beispiel zu wählen, einen auf zwei Stützen gelegten und belasteten Balken etwa auf einer Seite anheben wollten, so würde er dadurch aufhören, ein auf zwei Stützen ruhender Balken zu sein. Wir hätten deshalb die Bedingungen dieses Systems nicht innegehalten. Derartige Verschiebungen, bei denen in der Tat eine Arbeit geleistet werden würde, können wir also nach dem von uns angenommenen und auch sonst in der Mechanik üblichen Sprachgebrauch als nicht „möglich" bezeichnen und deshalb außer Betracht lassen. Auch von einer andern Seite her betrachtet erscheint uns der Zusatz entbehrlich. Fourier selbst sagt (Nr. 7, S. 30): *„Au reste si l'on considère les résistances comme des forces, le corps peut être regardé comme libre, et la somme des momens est nulle pour tous les déplacemens possibles."* Die Kräfte, die Fourier hier an Stelle der *„résistances"* setzt, sind unstetige Funktionen des Ortes, denn sie fallen für diejenigen unendlich kleinen Ortsveränderungen des betreffenden Punktes, die wir oben besprochen haben, plötzlich von einem endlichen Werte auf den Wert Null herab. Wenn wir darauf Rücksicht nehmen würden, so würde allerdings selbst bei einer unendlich kleinen derartigen Verschiebung die Arbeit der freien Kräfte nicht zu Null kompensiert werden. Wir haben aber oben (S. 160) von Helmholtz gelernt, daß wir alle Kräfte bei der Verschiebung als konstant ansehen dürfen. Daran hat, nach obiger Stelle zu schließen, auch Fourier schon gedacht, und wir können uns daher auf seine eigene Meinung stützen, wenn wir uns zu der von ihm vorgeschlagenen Änderung in der Fassung der P. d. v. G. nicht verstehen wollen. Man könnte noch gegen uns ins Feld führen, daß der Zusatz doch nötig wird, wenn die Bedingungen der Aufgabe durch Ungleichungen gegeben sind, und könnte sich dabei auf die Ausführungen berufen, die sich in Ritters analytischer Mechanik (Nr. 26, S. 227) finden. Darauf wäre zu erwidern, daß die in diesem Falle entstehenden Schwierigkeiten künstlich durch die mathematische Form erzeugt sind, in die man das ursprünglich vorliegende mechanische Problem kleidet. Der mechanischen Seite der Probleme kann man auch ohne den Zusatz gerecht werden.[1]) Notwendig ist der Zusatz also nicht, doch kann zu-

1) Haben wir beispielsweise einen Punkt, der außerhalb einer Kugel bleiben soll, so kann er entweder mit der Kugel in Berührung sein oder nicht. Im ersten

gestanden werden, daß er für manche Aufgaben eine bequemere Lösung ermöglichen mag. Im übrigen werden wir sogleich bei HELMHOLTZ sehen, daß man durch Gründe logischer Art durchaus genötigt ist, sich alle Verbindungen dusch Kräfte ersetzt zu denken, wodurch nicht nur die RITTERschen Ungleichungen ihren Sinn einbüßen, sondern auch die Anwendung von Gleichungen ganz neue Formen annimmt.

Kraftdefinition.

Um diese logischen Gründe voll würdigen zu können, wäre eine Abschweifung in das philosophisch-mechanische Gebiet der Kräftedefinition notwendig. Da uns das aber hier zu weit führen würde, so begnügen wir uns damit, durch einige Andeutungen, die auf philosophische Strenge keinen Anspruch machen, in das Verständnis des folgenden einzuführen, im übrigen aber auf die zitierte Arbeit von STREINTZ (Nr. 30) und namentlich auf die betreffenden Kapitel in HELMHOLTZS Vorlesungen über theoretische Physik zu verweisen. — Wenn wir einen schweren Körper in die Mitte eines an beiden Enden unterstützten, ursprünglich geraden Balkens legen, so entsteht eine Durchbiegung, die so lange bestehen bleibt, als der Körper auf dem Balken liegt. Als Ursache sowohl für das Entstehen als auch für die Erhaltung der Durchbiegung bezeichnen wir eine Kraft, nämlich die Schwere. Haben wir den Balken nicht stark genug gewählt, so bricht er, und der Körper fällt mit Beschleunigung zur Erde. Als Ursache dieser Beschleunigung bezeichnen wir wiederum die Schwere. Wir finden eben, daß ein enger Zusammenhang zwischen Beschleunigung und Deformation besteht, obwohl sie ganz heterogene Erscheinungen sind, und drücken diesen Zusammenhang dadurch aus, daß wir sie beide aus einer gemeinsamen Ursache ableiten, die wir als „Kraft" bezeichnen; ähnlich wie wir zuweilen in der Erkenntnistheorie gänzlich verschiedene Sinneswahrnehmungen wie Licht- und Schallempfindungen miteinander verknüpft finden, dadurch, daß sie auf dasselbe „Ding an sich" bezogen sind. Wo wir weder Beschleunigung noch Deformation beobachten, da haben wir keinen Grund, eine Kraft als wirksam anzunehmen. Umgekehrt fordert die objektive Gesetzmäßigkeit, die wir der Kraftwirkung zuschreiben, daß dort entweder Beschleunigungen oder Formänderungen eintreten, wo wir aus irgend welchen Gründen Kräfte als wirksam vorauszusetzen genötigt sind. Wir können dies auch stets experimentell nachweisen, wenn wir nur genügend feine Beobachtungsmittel in Anwendung bringen.

Fall ersetzen wir die Fläche durch die Verbindungskraft, oder wir sehen nur solche unendlich kleinen Verrückungen als „möglich" an, die in der Tangentialebene der Kugel liegen. Im zweiten Fall ist das Vorhandensein der Kugel für das Gleichgewicht des Punktes überhaupt gleichgültig, so daß sich der Punkt durch nichts von einem freien unterscheidet.

Kräfte einerseits, und Gleichungen und Flächen andererseits sind heterogene Dinge.

Nach den Grundanschauungen der Dynamik kann eine Kraft nur aufgehoben werden durch eine ihr entgegengesetzt gleiche. Befindet sich also ein materieller Punkt vermöge der Verbindungen, die seine Bewegungsfreiheit beschränken, im Gleichgewicht, obwohl eine freie Kraft auf ihn wirkt, so sind wir genötigt anzunehmen, daß die Verbindungen auf ihn eine Kraft ausüben, die der an ihm angebrachten freien Kraft entgegengesetzt gleich ist. Dann muß aber nach dem Prinzip der Actio und Reactio auch der Punkt auf die Verbindung eine Kraft ausüben. Da nun von Beschleunigung hier nicht die Rede sein kann, so muß sich die Wirkung dieser letzten Kraft durch eine Deformation der Verbindungen äußern. Hatten wir also die Verbindung vor Anbringung der freien Kraft an dem materiellen Punkte durch eine Gleichung beschrieben, so kann diese Gleichung wegen der unvermeidlichen Deformation nun nicht mehr zutreffen. Schon Jacobi hat in einem im Winter 1847/48 zu Berlin gehaltenen Kolleg (dessen Ausarbeitung sich im Besitz der Berliner Akademie der Wissenschaften befindet) darauf hingewiesen, daß eine etwa durch eine Bedingungsgleichung gegebene, mathematische Fläche und eine Kraft zwei ganz heterogene Dinge sind, und C. Neumann hat (Nr. 21, S. 257), dadurch angeregt, den Versuch gemacht, einen der Logik und den Naturvorgängen angepaßten mathematischen Ausdruck für die Kraft zu finden, durch die man sich die Bedingungen wirksam zu denken hat.

C. Neumanns Ausdruck für die Verbindungskraft.

Es gibt, wie wir vorhin klarlegten, keine absolut starren Verbindungen, und es gibt deshalb auch keine Bewegung, die durch die Verbindungskräfte gänzlich unmöglich gemacht würde. Doch müssen wir uns die Verbindungskräfte so beschaffen vorstellen, daß sie schon bei sehr kleinen, die Bedingungsgleichung störenden Verschiebungen eine bedeutende Größe erlangen und die Punkte wieder in Lagen zurückziehen, die mit der Gleichung verträglich sind, während sie einer mit letzterer im Einklang stehenden Bewegung nicht den mindesten Widerstand entgegensetzen dürfen. Neumann kommt für die x-Komponenten einer solchen Kraft zu dem Ausdruck $-2\,Ke^{K\varphi}\,\varphi\,\frac{\partial\varphi}{\partial x}$, wo $\varphi = 0$ die Bedingungsgleichung, K eine Konstante und e die Basis des natürlichen Logarithmensystems ist. Man überzeugt sich leicht, daß dieser Ausdruck für φ gleich Null verschwindet, und daß überhaupt die durch ihn repräsentierte Kraft die oben geforderten Eigenschaften hat. Seine Form ist übrigens mit Rücksicht auf die Potentialtheorie bestimmt, was wir hier nicht näher erörtern wollen.

Helmholtz.

Vielmehr wollen wir bei Helmholtz sehen, wie ein diesem entsprechender Ausdruck aufgebaut wird. Es ist mir natürlich unmöglich, die Helmholtzschen Gedanken kürzer und doch ebenso klar wiederzugeben,

wie er es selbst tut. Die folgenden Zeilen sollen daher nur ein leicht verständliches Bild davon für diejenigen liefern, denen das Studium der Originalarbeit zuviel Zeit kostet. HELMHOTZ geht darauf aus, das Potential ψ der Bedingungskraft zu finden, indem er Differentialquotienten davon zu bestimmen sucht und ihre Werte in eine Reihenentwicklung für ψ einsetzt; nachdem er ψ auf diese Art gefunden hat, verwendet er es zur Aufstellung der Gleichgewichtsbedingungen und des P. d. v. G. Er setzt zunächst eine Bedingungsgleichung $G = 0$ voraus. Wie die Potentialtheorie lehrt, sind dann die Kraftkomponenten nach irgend einer Koordinatenrichtung ∂x_a gleich $-\frac{\partial \psi}{\partial x_a}$. Diese Größe unterscheidet sich aber nur dann von Null, wenn $G = 0$ nicht erfüllt ist. Man kann ψ statt als Funktion der Koordinaten zunächst direkt als Funktion von G ansehen; das ja selbst wieder eine Funktion der Koordinaten ist. ψ hat für $G = 0$ einen ausgezeichneten Wert, da sein Differentinlquotient, der ja die Kraftkomponente ist, dafür gleich Null ist. Dieser Wert ist willkürlich anzunehmen und wir setzen deshalb $\psi_{G=0} = 0$ (cfr. Nr. 10, S. 285 oben). Ferner haben wir auch $\left(\frac{d\psi}{dG}\right)_{G=0} = 0$, da ja der Zähler des Bruches gleich Null ist. Der zweite Differentialquotient von ψ nach G muß für $G = 0$ einen sehr großen Wert haben, da er als erster Differentialquotient der Kraft das steile Ansteigen derselben für kleine Abweichungen von $G = 0$ auszudrücken hat. So erhalten wir: $\left(\frac{d^2\psi}{dG^2}\right)_{G=0} = C$, wo C eine beliebig große Konstante ist. Man erkennt in C einen nahen Verwandten des Elastizitätsmoduls E $\left(= \frac{\text{Spannung}}{\text{Dehnung}} = \frac{\text{Kraft pro Flächeneinheit}}{\text{Verlängerung pro Längeneinheit}} = \frac{\text{Differential der Kraft}}{\text{Differential der Formänderung}}\right)$. Damit wäre die Funktion selbst und zwei Differentialquotienten für den Spezialwert Null der variablen G bestimmt. HELMHOLTZ wendet nun die MAC-LAURINsche Reihe an und erhält $\psi = \frac{1}{2} CG^2$ als einziges Glied, da die beiden vorhergehenden gleich Null, alle folgenden aber der höheren Potenzen des unendlich kleinen G wegen gegen das dritte zu vernachlässigen sind. Nun ist noch zu berücksichtigen, daß G eine Funktion der Koordinaten ist und deshalb auch ψ. Wir setzen n materielle Punkte mit $3n$ Koordinaten $x_1, x_2, \ldots x_p, x_q \ldots, x_{3n}$ voraus und gehen von einer speziellen Wertgruppe $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_{3n})$ dieser Koordinaten aus, welche die Gleichung $G = 0$ erfüllt. Nun wird ψ nach dem TAYLORschen Satz für mehrere Variable als Funktion der Abweichungen der Koordinaten von diesen Werten entwickelt. Nachdem HELMHOLTZ dadurch das Potential der Verbindungskräfte in der gewünschten Form erhalten hat, benutzt er es zur Ableitung der Gleichgewichtsbedingungen und des P. d. v. G. Er nimmt äußere Kräfte an, welche das Potential Φ haben.

Dann bezeichnet $\Phi + \Psi$ die gesamte potentielle Energie. Die Kraftkomponente nach einer beliebigen Kraft-Koordinateneinrichtung x_a ist dann gleich $\frac{\partial(\Phi + \Psi)}{\partial x_a}$ und das Gleichgewicht verlangt (Prinzip der Kräftezusammensetzung): $\frac{\partial(\Phi + \Psi)}{\partial x_a} = 0$ oder auch $\frac{\partial \Phi}{\partial x_a} + \frac{\partial \Psi}{\partial x_a} = 0$ für jedes a. In das zweite Glied der linken Seite wird der gefundene Wert von Ψ eingesetzt, und es werden Umformungen damit vorgenommen, bis sich die Gleichung schließlich in der Gestalt ergibt:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_a} + \frac{\partial G}{\partial x_a}\left\{\sqrt{C}\sum_p \sqrt{2\Psi_p}\right\} = 0$$

für jedes a, wo Ψ_p Spezialwerte von Ψ sind, die man erhält, wenn jede der Koordinaten $x_1, x_2, \ldots x_{3n}$ einzeln aus der vorhin angenommenen speziellen Lage $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_{3n}$ verschoben wird, während alle übrigen ungeändert bleiben. Da das erste Glied der linken Seite einen endlichen Wert besitzt, so muß dies auch beim zweiten der Fall sein, das ja das erste zu Null ergänzt. Da nun der Faktor $\frac{\partial G}{\partial x_a}$ endlich ist, so muß es auch die geschweifte Klammer sein, und wir könnten ihren Wert bei genügender Kenntnis der Funktion Ψ angeben. Machen wir die spezielle Annahme, daß wir es mit idealen, also starren Verbindungen zu tun haben, so wird C (der Elastizitätsmodul des Materials) unendlich groß, während $\sum_p \sqrt{2\psi_p}$ wegen der in diesem Falle vollständigen Erfüllung von $G = 0$ verschwindend klein wird. Die Klammer erhält somit einen Wert von der unbestimmten Form $\infty\, 0$, den wir mit γ bezeichnen. Dann lauten die $3n$ Gleichgewichtsbedingungen $\frac{\partial \Phi}{\partial x_a} + \gamma \frac{\partial G}{\partial x_a} = 0$ für jedes a von 1 bis $3n$. Da wir hier absolute Starrheit vorausgesetzt haben, so ist auch die Gleichung $G = 0$ streng gültig und kommt als $(3n+1)^{\text{te}}$ Gleichung hinzu. Dadurch wird erst eine bestimmte Beantwortung der Frage möglich, welche Werte die Koordinaten der Punkte unter gegebenen Kraftverhältnissen für Gleichgewicht haben müssen. Denn wir haben dann außer den $3n$ Koordinaten noch γ als Unbekannte anzusehen, so daß in den $(3n+1)$ Gleichungen auch $(3n+1)$ Unbekannte vorkommen. Ebenso kann man das Problem behandeln, wenn mehrere, etwa m Bedingungsgleichungen vorliegen. Man erhält für den Idealfall vollkommener Starrheit ganz entsprechend

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_a} + \sum_{b=1}^{b=m} \gamma_b \frac{\partial G_b}{\partial x_a} = 0$$

für $a = 1$ bis $a = 3n$, wo b der Index irgend einer der Bedingungsglei-

chungen ist. Die einzelnen Glieder der Summen sind die Komponenten der Verbindungskräfte. Multipliziert man jede dieser $3n$ Gleichungen mit einem beliebigen Koeffizienten δx_a (wo der Index a mit dem Index a der betreffenden Gleichung übereinstimmt) und addiert sie, so erhält man, wie wir es ganz entsprechend schon auf Seite 160 dieser Arbeit kennen gelernt haben, als einzige Gleichung, die alle vorigen in sich enthält,

$$\sum_{a=1}^{a=3n}\left\{\frac{\partial \Phi}{\partial x_a} + \sum_{b=1}^{b=m} \gamma_b \frac{\partial \mathfrak{G}_b}{\partial x_a}\right\} \delta x_a = 0 .$$

Das ist das P. d. v. G. Die unbestimmten Multiplikatoren γ_b sind ihrer Bedeutung nach identisch mit den durch λ bezeichneten, die wir (auf Seite 164 dieser Arbeit) bei der Besprechung des in Lagranges Funktionentheorie für das P. d. v. G. gelieferten Beweises kennen gelernt haben, und die in Lagranges analytischer Mechanik eine große Rolle für Symmetrie und Einfachheit der Rechnung spielen, wie wir im Kapitel „Anwendungen" noch sehen werdeu. Unser Endresultat stimmt für den idealen Spezialfall starrer Verbindungen dem Sinne nach mit dem Lagranges überein.

Vorteil der neuen Anschauungsweise. Günstiger Einfluß der alten auf die Entwicklung der Mechanik.

Das Helmholtzsche Verfahren hat aber den großen Vorzug, daß es erstens die Verbindungen in derjenigen Allgemeinheit berücksichtigt, die ihnen in Wirklichkeit zukommt, und zweitens, daß es uns den Fall der starren Verbindung als Grenzfall der natürlichen Verbindung darstellt und dadurch verständlich macht. Er vermeidet also die oben gekennzeichneten Fehler, die sich bei Lagrange hinter den schon früher (Seite 163) zitierten Worten verbergen: „Es ist klar, daß die Richtung der Wirkung der Fläche auf den Körper oder vielmehr des Widerstandes, den sie ihm entgegensetzt, nur auf der Fläche senkrecht stehen kann." Mit diesem Satz verläßt Lagrange den festen Boden rein mathematischer Überlegung, indem er von der „Wirkung" oder von dem „Widerstande" einer durch eine Gleichung gegebenen Fläche spricht. Dem der Mathematik angehörigen Begriff einer solchen Fläche liegt ja „Wirkung" und „Widerstand" ganz fern. Helmholtz selbst hat einen gewissen Vorwurf für „diejenigen Theoretiker, welche an der physikalischen Unmöglichkeit starrer Verbindungen keinen Anstoß genommen haben und jene Widerstandskräfte aus der Betrachtung einfach weggelassen haben" (Nr. 10, S. 292). Helmholtz läßt durchblicken, daß er die Richtigkeit ihrer Resultate für einen glücklichen Zufall hält. Dagegen kann man wohl anführen, daß Lagrange vielleicht das allgemeine Gesetz, das nur im Idealfall herrscht, wie Galilei das Trägheitsgesetz, mit genialem Blick durch die störenden Nebenumstände hindurch gesehen hat. In jedem Falle kann man es wohl als vorteilhaft für die Entwicklung der

Mechanik bezeichnen, daß Lagrange, sei es nun absichtlich oder unabsichtlich, den mechanischen Erscheinungen nicht sogleich mit voller Exaktheit gerecht zu werden versucht hat. Denn wie Kepler den Kegelschnitt als Grundform der Planetenbahnen vielleicht nicht erkannt hätte, wenn er die Störungserscheinungen gekannt und berücksichtigt hätte, so wären wir wohl auch in der Mechanik noch nicht zu einer übersichtlichen und verständlichen Auffassung der Naturtatsachen hindurchgedrungen, wenn wir nicht einen Stamm von annähernd richtigen Kenntnissen hätten, auf den sich ergänzende genauere Forschungen stützen können.

V. Der Beweis des P. d. v. G. durch das Prinzip der lebendigen Kraft.

Das Prinzip der Erhaltung der lebendigen Kraft, das wir in seiner Eigenschaft als Grundlage für Beweise des P. d. v. G. nunmehr betrachten wollen, verdankt sein Dasein nur der geschilderten Abstraktion von störenden Nebenumständen. Es ist ein idealer Spezialfall des Prinzips von der Erhaltung der Energie,[1]) das seinerseits als „eine selbständige Erfahrungstatsache" angesehen werden kann, „welche zu dem Inhalt der Axiome Newtons hinzutritt" (Helmholtz Nr. 10, S. 269). Das P. d. v. G. wiederum kann als Spezialfall des Prinzips der lebendigen Kraft aufgefaßt werden. Darauf beruht der Beweis, den wir hier geben wollen.

Das Prinzip der lebendigen Kraft läßt sich analytisch durch die Gleichung ausdrücken $\sum\left(\frac{mv^2}{2}\right) - \sum\left(\frac{mc^2}{2}\right) = \sum(A) + \sum(a)$, wo wir bezeichnen: durch c die Geschwindigkeit der einzelnen Massenpunkte m am Anfang des Zeitabschnittes, während dessen wir die Bewegung des Systems betrachten; durch v die Geschwindigkeit am Ende derselben, durch $\sum(A)$ die Summe der von den freien, durch $\sum(a)$ die Summe der von den Verbindungskräften inzwischen geleisteten Arbeiten, während sich das Zeichen Σ

1) Denn der Leibnizsche Satz, der mit dem Prinzip der lebendigen Kraft im wesentlichen identisch ist (cfr. Nr. 10, S. 193), gilt nur, wenn die auftretenden Kräfte ein Potential haben (Gravitation, elektrische und magnetische Anziehung). Solche Kräfte kommen aber in der Natur stets in der Verbindung mit anderen vor, für welche die Aufstellung und Integration der betreffenden Differentialgleichungen nicht oder noch nicht geglückt ist (Molekularkräfte). Dies dürfte bei genügend feiner Beobachtung auch für kosmische Verhältnisse zutreffen. Ich erinnere an den exakt beobachteten Einfluß der Sonne auf die Torsion des Pfeiles, der das Meridianinstrument der Berliner Sternwarte trägt. Mach sagt (Nr. 17, S. 486): „Rein mechanische Vorgänge sind Abstraktionen, die absichtlich oder notgedrungen zum Zwecke der leichteren Übersicht vorgenommen werden." Deshalb also kann das Prinzip der lebendigen Kraft nur ein idealer Spezialfall des Prinzips von der Erhaltung der Energie sein.

links auf sämtliche Massenpunkte m des Systems bezieht. Setzen wir absolut unveränderliche Verbindungen voraus, so ist, wie wir gesehen haben, die Arbeit der Verbindungskräfte bei jeder möglichen, also auch bei der wirklich eintretenden Verschiebung gleich Null (da wir es hier mit wirklicher, nicht mit virtueller Bewegung zu tun haben, müssen wir hier noch hinzufügen: vorausgesetzt, daß die Gleichungen, durch welche die Verbindungen ausgedrückt werden können, nicht Funktionen der Zeit sind. Wir kommen darauf bei Besprechung der Anwendung des P. d. v. G. auf die Dynamik noch zurück). Unsere Gleichung nimmt somit die Form an $\sum\left(\frac{m v^2}{2}\right) - \sum\left(\frac{m c^2}{2}\right) = \sum(A)$. Wir haben sie in Beziehung zu bringen zur Definition des Gleichgewichts eines Massensystems, welche wohl übereinstimmend in der Form gegeben wird: Ein System von materiellen Punkten befindet sich im Gleichgewichtszustande, wenn jeder einzelne Punkt desselben im Gleichgewichtszustande sich befindet, d. h., wenn jeder einzelne Punkt eine geradlinige gleichförmige Bewegung ausführt (oder in Ruhe ist). Daraus geht hervor, daß in unserer Gleichung $v = c$ wird, wenn sich das Massensystem im Gleichgewicht sich befindet, so daß die beiden Glieder der linken Seite einander aufheben. Dadurch ergibt sich $\sum(A) = 0$. 1) Das heißt: Für den Fall, daß das Massensystem im Gleichgewicht ist, ist die Gesamtarbeit der Kräfte bei der wirklich vor sich gehenden gleichförmigen Bewegung (worin der Fall der Ruhe als Spezialfall enthalten ist) gleich Null. 2) Ist das Massensystem bei der Bewegung, die es wirklich hat, im Gleichgewicht, so wäre es (nach der oben gegebenen Definition des Gleichgewichts eines Massensystems) auch bei jeder anderen Bewegung, die man ihm erteilen könnte, im Gleichgewicht, wofern nur auch bei dieser Bewegung sich jeder seiner Punkte gleichförmig und geradlinig bewegt. 3) Ist also das Massensystem im Gleichgewicht, so ist bei jeder derartigen Verschiebung die Summe der von den Kräften geleisteten Arbeiten gleich Null. Der unter 3) ausgesprochene Satz ist das P. d. v. G. Hier ist das Wort „Geschwindigkeiten“ in der Tat am richtigen Ort, weil die Verschiebung gleichförmig erfolgt und beliebig groß angenommen werden kann, wir müssen dann aber die Kräfte entweder als unabhängig vom Ort voraussetzen oder sie trotz ihrer Abhängigkeit konstant halten, wie wir dies an anderer Stelle (S. 160) schon auseinandergesetzt haben. Einen ähnlichen Beweis gibt Ritter (Nr. 27, S. 432), doch wird bei der Fassung, die er dem P. d. v. G. gibt, das Verschwinden der Arbeitssumme nicht wie bei uns vom Gleichgewicht des Massensystems, sondern vom Gleichgewicht des Kräftesystems abhängig gemacht. Den Unterschied zwischen dieser Form und der unsrigen werden wir bei der Besprechung der Umkehrbarkeit des P. d. v. G. erörtern.

VI. Noch andere Prinzipien als Grundlagen für Beweise des P. d. v. G.

In engem Zusammenhang mit dem Prinzip der lebendigen Kraft steht das HAMILTONsche Prinzip, dieses wieder ist innerlich verwandt mit dem MAUPERTUISschen und mit anderen Integralprinzipien. Jeder dieser Sätze könnte uns Material zum Beweise des P. d. v. G. liefern. Wir müssen uns auf die Behandlung eines Beispiels beschränken.

Herleitung des P. d. v. G. aus dem GAUSSschen Prinzip

Dazu wählen wir das GAUSSsche Prinzip des kleinsten Zwanges (das man wegen der Minimaleigenschaften, von denen es handelt, vielleicht als ein Differentialprinzip bezeichnen könnte). Wie wir in der Einleitung gesehen haben, verdient die Ableitung des P. d. v. G. aus einem anderen Satze nur dann den Namen eines Beweises, wenn letzteres selbst beweislos angenommen wird. Dies trifft für das GAUSSsche Prinzip nach Meinung seines Entdeckers (cf. das Zitat auf S. 150 dieser Arbeit) und der anderer Autoren (SCHEFFLER) zu. Das GAUSSsche Prinzip besagt, daß für ein beliebiges materielles System der bei der wirklich erfolgenden Bewegung durch die Verbindungen ausgeübte „Zwang" gegenüber dem bei jeder anderen möglichen Bewegung ausgeübten in jedem Augenblick ein Minimum ist, „indem man als Maß des Zwanges, den das ganze System in jedem Zeitteilchen erleidet, die Summe der Produkte aus dem Quadrat der Ablenkung jedes Punktes von seiner freien Bewegung in seine Masse betrachtet". Wir bezeichnen durch m einen dieser Punkte und zugleich seine Masse und durch $\overline{zf}$ die Verbindungslinie des Ortes f, den er als freier Punkt ohne die Einwirkung der Zwangskräfte nach Ablauf der Zeit dt erreichen würde, mit dem Orte z, den er unter der Einwirkung der Zwangskräfte tatsächlich erreicht, dann ist $m(zf)^2$ der diesem Punkte angetane, und $\Sigma m(zf)^2$ der dem ganzen System angetane Zwang, wenn man die Summierung über alle Punkte des Systems erstreckt. Für eine von der tatsächlichen unendlich wenig verschiedene Bewegung gilt also die Differentialgleichung $d\left(\sum m\left(\overline{zf}\right)^2\right) = 0$. Der Weg $\overline{zf}$ ist gleich der von der Verbindungskraft Z herrührenden Beschleunigung ζ mal $\frac{dt^2}{2}$. Der unter dem Summenzeichen stehende Ausdruck läßt sich also schreiben $m\zeta\frac{dt^2}{2}\overline{zf}$. Die Faktoren m und ζ zusammengefaßt geben Z. Das Produkt $Z\overline{zf}$ stellt die von der Verbindungskraft Z geleistete Arbeit dar, die wir durch A bezeichnen wollen. Unsere Gleichung nimmt, wenn wir dies einsetzen, die Gestalt an $d\left(\sum\left(A\frac{dt^2}{2}\right)\right) = 0$. Da $\frac{dt^2}{2}$ eine Konstante und allen Gliedern der Summe gemeinsam ist, so kann es durch Division beseitigt werden,

so daß wir erhalten $d(\Sigma(A)) = 0$. Das heißt, die Bedingungskräfte verrichten bei einer möglichen unendlich kleinen Verschiebung keine Arbeit. Es braucht wohl hier nicht näher ausgeführt zu werden, daß dieser Satz identisch ist mit dem D'ALEMBERTschen Prinzip in der LAGRANGEschen Form (cf. LAGRANGE Nr. 14, S. 212), das man durch die Gleichung ausdrücken kann:

$$\sum\left\{\left(X - m\frac{d^2x}{dt^2}\right)\delta x + \left(Y - m\frac{d^2y}{dt^2}\right)\delta y + \left(Z - m\frac{d^22}{dt^2}\right)\delta z\right\} = 0,$$

wo, wenn ich so sagen darf, X, Y, Z die Komponenten der „hinein gesteckten“ und $\frac{md^2x}{dt^2}$, $\frac{md^2y}{dt^2}$, $\frac{md^2z}{dt^2}$ die Komponenten der „herauskommenden“ Kräfte, also die in den Klammern stehenden Ausdrücke die Komponenten der Verbindungskräfte oder, wie man sie auch sehr treffend genannt hat, der „verlorenen“ Kräfte sind. Die ganze linke Seite ist also mit dem oben durch $d(\Sigma A)$ bezeichneten Arbeitsdifferential der Verbindungskräfte identisch, wenn man berücksichtigt, daß, wie früher bewiesen, die Arbeit der Resultierenden gleich der Summe der Arbeiten der Komponenten ist. Für den Spezialfall des Gleichgewichts verschwinden die „herauskommenden“ Kräfte, weil die Beschleunigungskomponenten $\frac{d^2x}{dt^2}$, $\frac{d^2y}{dt^2}$ und $\frac{d^2z}{dt^2}$ gleich Null werden, und wir erhalten die Gleichung des P. d. v. G. in der üblichen Form: $\Sigma(X\delta x + Y\delta y + Z\delta_2) = 0$.

Einen anderen Beweis des P. d. v. G. auf Grund des GAUSSschen Satzes gibt SCHEFFLER (Nr. 29, S. 204). Bei ihm ergibt sich das GAUSSsche Prinzip durch Kombination des allgemeinen pythagoreischen Lehrsatzes mit dem D'ALEMBERTschen Prinzip. Da nun ersterer eine rein geometrische Beziehung enthält, so kann durch Kombination mit ihm der mechanische Inhalt des D'ALEMBERTschen Prinzips nicht geändert worden sein. Er muß also mit dem des GAUSSschen Satzes von Anfang an identisch sein. Der Übergang vom D'ALEMBERTschen Prinzip zum P. d. v. G. kann gemacht werden, wie oben gezeigt.

Der Beweis von HERTZ.

Am Schlusse dieser Auswahl von Beweisen für das P. d. v. G. erwähne ich noch denjenigen, welcher sich in der Mechanik von HERTZ (Nr. 11, S. 230) findet. Daß ich ihn nur erwähnen und nicht darstellen kann, ist in seinen Vorzügen begründet. Die HERTZsche Mechanik verhält sich nach den eigenen Worten ihres Verfassers zu den gewöhnlicher Darstellungen, wie eine systematische Grammatik zu einem Sprachführer. Sie ist ein so fest gefügtes und logisches System, daß es schlechterdings unmöglich ist, einen einzelnen ihrer Sätze außerhalb des Zusammenhanges in seiner Begründung verständlich zu machen. Nur so viel kann ich andeuten, daß

sich das P. d. v. G. bei HERTZ wie die ganze Mechanik in letzter Linie auf den als Kombination des Trägheitsgesetzes mit dem GAUSSschen Prinzip anzusehenden Grundsatz stützt: „Jedes freie System beharrt in seinem Zustande der Ruhe oder der gleichförmigen Bewegung in einer geradesten Bahn.“

C. Über die Umkehrbarkeit des P. d. v. G.

I. In der gewöhnlichen Fassung ist das P. d. v. G. nicht umkehrbar.

In der gewöhnlichen Fassung ist das P.d.v.G. nicht umkehrbar.

Spricht man das P. d. v. G., wie dies allgemein üblich ist, in der Form aus: „Wenn ein System von Massenpunkten, in welchem Verbindungen bestehen, sich im Gleichgewicht befindet, so ist bei jeder beliebigen möglichen unendlich kleinen Verschiebung die Summe der geleisteten Arbeiten gleich Null“, so ist eine Umkehrung desselben nicht möglich. Sie müßte lauten: „Wenn bei jeder unendlich kleinen Verschiebung eines Systems von Massenpunkten, welche mit den darin bestehenden Verbindungen verträglich ist, die Summe der geleisteten Arbeiten gleich Null ist, so ist das System im Gleichgewicht.“ Von der Unrichtigkeit dieses Satzes wollen wir uns sogleich durch ein Beispiel überzeugen. Vorher erinnern wir uns nochmals an die ganz allgemein übliche Definition für das Gleichgewicht eines Systems von materiellen Punkten. „Ein System von materiellen Punkten findet sich im Gleichgewichtszustande, wenn jeder einzelne materielle Punkt desselben im Gleichgewichtszustande sich befindet, d. h. wenn jeder einzelne Punkt eine geradlinige gleichförmige Bewegung ausführt“ (cf. z. B. RITTER Nr. 27, S. 161). Betrachten wir nun z. B. die Bewegung eines starren Körpers, auf den gar keine Kräfte wirken, etwa eine Kugel, die sich um einen ihrer Durchmesser dreht. Arbeit kann hier in Ermangelung von Kräften überhaupt nicht geleistet werden. Die Summe der Arbeiten ist also sicherlich gleich Null, und doch ist die Kugel nicht im Gleichgewicht, denn ihre Punkte bewegen sich, abgesehen vom Schwerpunkt, nicht geradlinig und gleichförmig. Haben wir statt der Kugel einen beliebigen freien, festen Körper, so lehrt uns die POINSOTsche Theorie, daß er sich so bewegt, daß sein Trägheitsellipsoid stets auf der feststehenden Ebene des Maximums der Flächenräume rollt. Es ist also nicht im entferntesten davon die Rede, daß, abgesehen vom Schwerpunkt, sich seine Punkte geradlinig und gleichförmig bewegen, obwohl die geleistete Arbeit Null ist, weil gar keine Kräfte vorhanden sind, die Arbeit leisten könnten. (Von der Einführung innerer Kräfte sieht man ab, wenn man den starren Körper als Grundgebilde betrachtet, aber selbst, wenn man sie eingeführt denkt, ist ihre

Arbeit, wie schon mehrfach bewiesen, gleich Null.) Es würde uns auch nichts helfen, wenn wir die Definition des Gleichgewichts derart erweitern wollten, daß sie die gleichförmige Drehung mit umfaßt (woran Helmholtz [Nr. 10, S. 270] zu denken scheint). Denn wie Poinsot lehrt, ist die Winkelgeschwindigkeit unseres Körpers nicht konstant (sondern abhängig von der variablen Länge der Momentanachse, gemessen vom Schwerpunkt bis zum Schnitt mit dem Trägheitsellipsoid), seine Drehung also nicht gleichförmig.

Unkorrekte Fassungen der Umkehrung.

Trotzdem sagt Delaunay (Nr. 5, S. 237): „Es ist für das Bestehen des Gleichgewichts eines starren Körpers, an dem verschiedene Kräfte F, F', F'', ... wirken, notwendig und hinreichend, daß die Summe der Arbeiten dieser Kräfte für jede unendlich kleine, dem Körper erteilte Verschiebung gleich Null sei.“ Denselben Irrtum begeht Scheffler, wenn er (Nr. 29, S. 208) bei der Erörterung der Gleichgewichtsbedingungen eines starren Körpers erklärt: „Die Gleichung $\sum(X dx + Y dy + Z dz) = 0$ ist also für das Gleichgewicht notwendig und ausreichend.“ (Aus dem Zusammenhange des Schefflerschen Aufsatzes geht hervor, daß unter X, Y, Z nur die Komponenten der äußeren Kräfte und unter „Gleichgewicht“ das Gleichgewicht des starren Systems zu verstehen ist.) Auch Lagrange spricht sich über diesen Punkt nicht mit der nötigen Deutlichkeit aus (Nr. 14, S. 22; num. 20). Man sieht nicht ein, weshalb dort trotz der Unbeweglichkeit des Gewichtes nicht z. B. einer der Massenpunkte samt der an ihm befestigten losen Rolle gleichförmig, um die dazu gehörige feste Rolle des betreffenden Flaschenzuges sollte rotieren, also eine (Zentripetal-) Beschleunigung haben können. Es ist wohl auch nicht ganz korrekt, wenn Ritter, der beim P. d. v. G. diesen Fehler vermeidet, beim Aussprechen der Gleichgewichtsbedingungen (Nr. 27, S. 184) mit den Worten beginnt: „Wenn die auf ein System von unveränderlich miteinander verbundenen Punkten wirkenden Kräfte einander im Gleichgewicht halten, so ist ... usw.“ und schließt: „Umgekehrt, wenn diese Bedingungen erfüllt sind, so befindet sich das System im Gleichgewichtszustande.“ Das Wort „System“ wird jeder Leser hier in der Bedeutung „Massensystem“ auffassen, da von „Kräftesystem“ vorher nicht die Rede war, trotzdem mag Ritter „Kräftesystem“ gemeint haben.

Fehlerquellen.

Der Irrtum hat seine Quelle darin, daß die Begriffe „Massensystem“ und „Kräftesystem“ resp. „Gleichgewicht eines „Massensystems“ und „Gleichgewicht eines Kräftesystems“ nicht gehörig auseinandergehalten werden, oder auch darin, daß man die Worte „vorausgesetzt, daß das Massensystem sich ursprünglich im Gleichgewicht befand“ in den Beweis einschmuggelt, anstatt sie als Einschränkung in den Lehrsatz mit aufzunehmen. Ersteres

trifft beispielsweise für den an oben zitierter Stelle bei Delaunay stehenden Beweis zu, letzteres für einen von Poisson (Nr. 24, Bd. I, S. 670) gegebenen, den Delaunay (Nr. 5, S. 253) bei Behandlung des Gleichgewichts beliebig verbundener Punktsysteme wiederholt.

II. Nach Ausmerzung des verwirrenden Begriffes „Gleichgewicht eines Massensystems“ ist die Umkehrung möglich.

Die Möglichkeit zur Richtigstellung

Will man der Umkehrung eine korrekte Fassung geben, so stehen einem drei Wege offen. I. Man macht die erwähnte Einschränkung, nachdem man das Wort „ist“ durch „bleibt“ ersetzt hat, so daß der Schluß der Umkehrung nunmehr lautet: „. . . . so bleibt das Massensystem im Gleichgewicht, vorausgesetzt, daß es sich ursprünglich darin befand“. Diese Fassung hat den Nachteil, daß sie uns zu der Frage veranlaßt, was mit dem Massensystem geschieht, wenn letztere Voraussetzung nicht zutrifft, ohne daß wir darüber Auskunft erhalten. II. Man denkt sich alle Verbindungen durch Kräfte ersetzt, so daß die einzelnen Punkte völlig unabhängig voneinander werden, wobei man also alle Verschiebungen als möglich anzusehen hat. Hieraus ergibt sich leicht folgende Fassung der Umkehrung: Wenn bei jeder beliebigen virtuellen Verschiebung des Massensystems die Summe der von allen (äußeren und inneren, freien und Bedingungs-)Kräften geleisteten Arbeiten gleich Null ist, so ist das Massensystem im Gleichgewicht. Sie ist logisch einwandsfrei, leidet aber, wie wir das bei der Besprechung der zu ihr gehörigen Form des Satzes selbst gesehen haben (S. 160 dieser Arbeit) an mechanischer Inhaltslosigkeit. III. Man läßt den Begriff „Gleichgewicht eines Massensystems“ ganz fallen und spricht nur vom „Gleichgewicht eines Kräftesystems an einem Massensystem“, wofür man natürlich eine Definition geben muß. Dann lautet der Schluß der Umkehrung: „. . . . so ist das daran wirkende Kräftesystem im Gleichgewicht an dem Massensystem“.

Definition für: „Gleichgewicht eines Kräftesystems“.

Da wir es in der Tat für dringend nötig halten, den Verwirrung stiftenden Begriff „Gleichgewicht eines Massensystems“ zu beseitigen, so sprechen wir nur vom Vorschlag III weiter. Wir haben uns zunächst über den Begriff „Gleichgewicht eines Kräftesystems“ klar zu werden. Bei einem isolierten materiellen Punkt entsteht noch keine Schwierigkeit. Hier definieren wir selbstverständlich: Ein an einem materiellen Punkt wirkendes Kräftesystem ist im Gleichgewicht, wenn es eine Geschwindigkeitsänderung des Punktes weder der Größe noch der Richtung nach hervorruft. Bei einem Körper wollen wir hinfort sprechen von den äußeren Kräften, von den inneren Kräften und vom Gesamtkräftesystem, worunter wir die äußeren

und inneren Kräfte zusammengenommen verstehen. Wenn wir durch die Einführung der inneren Kräfte die einzelnen materiellen Punkte isolieren, so können wir ganz entsprechend wie vorhin definieren: Das Gesamtkräftesystem ist im Gleichgewicht, wenn es an keinem der Punkte eine Geschwindigkeitsänderung nach Größe oder Richtung erzeugt. Es hätte aber in diesem Falle keinen Sinn, wenn man etwa sagen wollte: „'Die äußeren Kräfte' oder auch 'die inneren Kräfte' sind für sich im Gleichgewicht", denn gerade durch die Einführung der inneren Kräfte sind ja die einzelnen Punkte ganz unabhängig voneinander geworden, so daß zwischen Kräften, die an verschiedenen Punkten wirken, gar keine Beziehung mehr denkbar ist. Sieht man von der Einführung der inneren Kräfte an Stelle der Verbindungen überhaupt ab, betrachtet man also den starren Körper (wie erwähnt) als Grundgebilde, so kann man diesen allerdings dazu benutzen, die Kräfte eines räumlichen Kräftesystems zueinander in Beziehung zu setzen. Man kann dann also auch von einem Gleichgewicht der Kräfte (die stets äußere sind) sprechen. Da wir aber gesehen haben, daß die einzelnen Punkte eines starren Körpers (und überhaupt eines materiellen Systems, in welchem Verbindungen bestehen) selbst, wenn gar keine Kräfte da sind, sich im allgemeinen weder geradlinig, noch gleichförmig bewegen, so werden wir hier die Begriffe „geradlinig" und „gleichförmig" in der Definition des Gleichgewichts des Kräftesystems zu vermeiden haben. Wir sagen deshalb: „Ein Kräftesystem befindet sich im Gleichgewicht an einem System von Massenpunkten, zwischen denen Verbindungen bestehen, wenn es auf die Bewegung desselben keinen Einfluß ausübt."

Vorschlag für die Fassung der Umkehrung.

Unter Voraussetzung dieser allgemeinsten Definition nimmt die Umkehrung die Form an: „Wenn bei jeder unendlich kleinen Verschiebung eines Systems von Massenpunkten, welche mit den darin bestehenden Verbindungen verträglich ist, die Summe der von den daran wirkenden Kräften geleisteten Arbeiten gleich Null ist, so üben die Kräfte auf die Bewegung des Massensystems (worin die Ruhe als Spezialfall steckt), keinen Einfluß aus, d. h. sie sind im Gleichgewicht an dem Massensystem." Dementsprechend müßte dann auch der ursprüngliche Satz (das P. d. v. G.) umgestaltet werden. Es wäre in diesem Falle nötig und in jedem Falle wünschenswert, daß man für denjenigen Zustand eines Massensystems, in welchem dessen Punkte sich gleichförmig und geradlinig bewegen, statt „Gleichgewicht" einen anderen Namen einführte, am besten wohl: „Unbeschleunigte Schiebung".

Schon in rein sprachlicher Beziehung deutet der Bestandteil „-gewicht" in dem Worte „Gleichgewicht" darauf hin, daß es sich um ein Attribut für Kräfte handelt. Punktsysteme können nur verschiedene Bewegungs-

zustände haben. Die Abhängigkeit dieser Bewegungszustände von dem Zustande des wirkenden Kräftesystems stellt sich wie folgt:

A. Beim einzelnen Massenpunkt (oder einem Haufen event. durch Einführung der inneren Kräfte voneinander unabhängig gemachter Punkte):

Ist die Bewegung:	so ist das Kräftesystem:
1) unbeschleunigt,	im Gleichgewicht,
2) beschleunigt,	nicht im Gleichgewicht.

B. Beim starren Körper:

Ist die Bewegung:	so ist das Kräftesystem:
1) unbeschleunigte Schiebung,	im Gleichgewicht,
2) beschleunigte Schiebung,	nicht im Gleichgewicht,
3) Schraubung,	**unbestimmt.**

Der Fall B. 3) ist es, der zu den erwähnten Irrtümern Anlaß gibt.

Beweise für die Umkehrung.

Beweise für die Umkehrung finden sich in der Literatur nur selten. Für den starren Körper hätte man zu zeigen, daß ein Kräftesystem, das bei keiner möglichen Verschiebung Arbeit leisten kann, sich auf zwei in derselben Geraden liegende entgegengesetzt gleiche Kräfte reduzieren lassen muß, und daß letztere auf die Bewegung des Körpers keinen Einfluß haben können. Für den einzelnen materiellen Punkt und entsprechend für den durch Einführung der inneren Kräfte in einzelne materielle Punkte aufgelösten Körper läßt sich leicht zeigen, daß die Resultierende der auf jeden der Punkte wirkenden Kräfte gleich Null sein muß (also keinen Einfluß ausüben kann), wenn die Arbeit für jede beliebige Verschiebung gleich Null ist. In beiden Fällen wäre zu beweisen, daß die mit den Kräften vorgenommenen Umformungen auf die Arbeitsleistung keinen Einfluß haben. Bei einem Massensystem mit beliebigen Verbindungen könnte man nach Poisson (Nr. 24, Bd. I, S. 670, § 336) so verfahren: Zum Beweise nehmen wir an, daß sich das Massensystem in Ruhe befindet (wir werden uns, was Poisson unterläßt, am Schluß des Beweises von dieser Annahme wieder frei machen). Hätten nun die Kräfte eine Wirkung, so müßten sie das System in Bewegung setzen, dies könnten wir verhindern, indem wir an jedem Punkte eine der Verschiebung gerade entgegengerichtete, dem Produkt aus der Beschleunigung des Punktes und seiner Masse gleiche Gegenkraft anbrächten. Dann würde Gleichgewicht herrschen und es müßte nach dem P. d. v. G. die Summe der Arbeiten auch bei derjenigen Verschiebung gleich Null sein, die wirklich eingetreten wäre, wenn wir die Gegenkräfte nicht angebracht hätten. Dabei würden aber letztere, da sie alle die Verschiebungsrichtung ihres Angriffspunktes gerade entgegengesetzt angenommen sind,

sämtlich negative Arbeit leisten, die ursprünglichen Kräfte also positive Dies widerspricht der Voraussetzung. Die ursprünglich angebrachten Kräfte können also auf das in Ruhe befindliche Massensystem keinen Einfluß ausüben. Da aber die Wirkung einer Kraft auf einen materiellen Punkt unabhängig ist von dem Bewegungszustand, in welchem der Punkt schon vorher war (Delaunay Nr. 5, S. 87, § 92), so folgt, daß die Kräfte auch dann keinen Einfluß ausüben können, wenn das Massensystem ursprünglich nicht in Ruhe war.

Helmholtz und die Umkehrung.

Schließlich will ich noch erwähnen, daß die hier besprochene ungenaue Fassung der Umkehrung des P. d. v. G. und der Gleichgewichtsbedingungen in allen mir bekannten Lehrbüchern entweder direkt ausgesprochen oder stillschweigend benutzt wird, wodurch mir, und vielleicht auch andern Lernenden, das Verständnis für die Grundbegriffe der Mechanik sehr erschwert worden ist.[1]) Einige Klarheit brachte plötzlich ein Wort, das ich bei Helmholtz fand. Er sagt (Nr. 10, S. 292): „Sobald die Summe der virtuellen Momente für jede durch die starren Verbindungen noch offen gelassene Verschiebung des Systems gleich Null wird, befindet sich das System in einer Gleichgewichtslage.“ Helmholtz hat also offenbar die hier erörterten Schwierigkeiten gesehen und ist ihnen durch eine elegante Wendung ausgewichen.

D. Beurteilung der Allgemeinheit.

Das P. d. v. G. steht mit den andern Lehren der Mechanik in so engem organischen Zusammenhang, daß seine Entwicklung mit derjenigen der gesamten übrigen Mechanik völlig Hand in Hand geht. Je allgemeiner die Mechanik geworden ist, desto allgemeiner hat man das P. d. v. G. ausgesprochen und bewiesen. Wir haben heute eine Wärmemechanik und eine Elektromechanik und finden demgemäß in beiden Gebieten das P. d. v. G. und seine Beweise. Und wenn es einst, was vielen Physikern (im Gegensatz zu Mach) möglich und wünschenswert erscheint, gelungen sein wird, die ganze Physik einer mechanischen Behandlung zugänglich zu machen, wenn wir einst imstande sein sollten, wie der Dubois-Reymondsche (Laplacesche)

---

1) Seit der Abfassung dieser Arbeit, die in das Jahr 1899 fällt, sind die „Vorlesungen über Technische Mechanik“ von Föppl erschienen. Dort wird die Umkehrung nicht ausdrücklich ausgesprochen; es wird aber, wie bei uns, stets scharf zwischen „Gleichgewicht eines Kräftesystems“ und „Gleichgewicht eines Massensystems“ unterschieden; ohne daß indessen das Radikalmittel gegen die ewige Verwechslung in Anwendung gebracht würde, nämlich die Abschaffung des einen der beiden Namen.

Weltgeist (Nr. 3) alle nicht rein geistigen Vorgänge der Welt in Vergangenheit und Zukunft durch die Differentialgleichungen für die Bewegung der einzelnen Atome zu beschreiben, dann würde möglicherweise auch das P. d. v. G. noch allgemeiner ausgesprochen und bewiesen werden können als heute. Mit der Beurteilung der bisher gelieferten Beweise können wir uns nach den vorausgegangenen ausführlichen Darlegungen kurz fassen. Wir unterscheiden fünf Stufen.

1. Sowohl die betrachteten Kräfte als auch die Verbindungen sind Spezialfälle. Dies trifft für die Zeit Galileis zu, wo man im wesentlichen nur die Schwere und die einfachen Maschinen durch das P. d. v. G. zueinander in Beziehung setzte.

2. Der Kraftbegriff ist (durch Newton) verallgemeinert, aber die Verbindungen sind noch Spezialfälle: Varignon.

3. Auch die Verbindungen werden von allgemeinen Gesichtspunkten aus betrachtet, indem gezeigt wird, daß ihre Wirkung stets durch Gleichungen (oder Ungleichungen) beschrieben werden kann, denen durch „Verbindungskräfte“ unbedingte Geltung verschafft wird, oder daß man verwickelte Kombinationen von Verbindungen für unendlich kleine Verschiebungen stets durch mehrfache Anwendung derselben einfachen Maschine (Fourierscher Hebel, Lagrangescher Flaschenzug) ersetzen kann: Lagrange, Fourier, Poisson, Ritter (analytische Mechanik) und viele andere. Auch die Beweise durch das Prinzip der lebendigen Kraft (Ritter Nr. 27) und durch das Gausssche Prinzip (Scheffler) gehören größtenteils hierher.

4. Bisher wurden nur Verbindungen betrachtet, die absolut starr sind, die also nur an Körpern vorkommen können, für deren Material der Elastizitätsmodul E den speziellen Wert $E = \infty$ hat. Von nun an wird bei Herleitung des P. d. v. G. der allgemeinere Fall betrachtet, daß der Wert von E beliebig ist: C. Neumann, Helmholtz.

5. Das Prinzip von der Erhaltung der Energie (früher nur dessen Spezialfall, das Prinzip der lebendigen Kraft) wird zur Begründung des P. d. v. G. verwendet, wodurch letzteres über das Gebiet der eigentlichen Mechanik hinaus Gültigkeit erlangt: Elektrizitätslehre, Wärmelehre.

E. Beispiele für die Anwendung des P. d. v. G.

Als Ergänzung erläutere ich zum Schluß noch an einem Beispiel die Art, wie Lagrange vom P. d. v. G. Gebrauch macht, und gehe mit einigen Worten auf die Anwendung ein, die das P. d. v. G. in der Dynamik und eine Abart (ich möchte sie „Prinzip der virtuellen Kräfte“ nennen) in der Fachwerkstheorie gefunden hat.

Beispiel aus der Statik für das Lagrangesche Verfahren.

Unser Beispiel für das Lagrangesche Verfahren ist absichtlich möglichst einfach und übersichtlich gewählt, damit das Resultat leicht mit Hilfe anderer Methoden auf seine Richtigkeit geprüft werden kann. Wir nehmen ein ebenes rechtwinkliges Koordinatensystem X, Y an (Fig. 4 S. 191). In seiner Ebene mögen drei Massenpunkte 1, 2, 3 liegen, deren Koordinaten $x'y'$, $x''y''$, $x'''y'''$ sind. Wir wollen nun die allgemeine Formel für die Lösung aller hier möglichen Aufgaben herleiten. Die Abstände dieser drei Punkte voneinander seien unveränderlich und zwar $12 = f$, $23 = g$, $31 = h$. Es bestehen also die drei Bedingungsgleichungen

$$\text{I.}\quad \sqrt{(x''-x')^2+(y''-y')^2}=f,$$

$$\text{II.}\quad \sqrt{(x'''-x'')^2+(y'''-y'')^2}=g,$$

$$\text{III.}\quad \sqrt{(x'''-x')^2+(y'''-y')^2}=h.$$

Wenn wir diese Gleichungen differenzieren, so erhalten wir Beziehungen zwischen den Änderungen der Koordinaten, die wir beachten müssen, wenn die Verschiebungen, die wir den Punkten erteilen wollen, „möglich" sein sollen. Wir müßten also mit Hilfe der drei Differentialgleichungen

$$\text{I a.}\quad \frac{(x''-x')(dx''-dx')+(y''-y')(dy''-dy')}{f}=df,$$

$$\text{II a.}\quad \frac{(x'''-x'')(dx'''-dx'')+(y'''-y'')(dy'''-dy'')}{g}=dg,$$

$$\text{III a.}\quad \frac{(x'''-x')(dx'''-dx')+(y'''-y')(dy'''-dy')}{h}=dh$$

drei Koordinatendifferentiale durch die übrigen ausdrücken und ihre Werte in die vom P. d. v. G. gelieferte Gleichung einsetzen. Dasselbe erreicht Lagrange übersichtlicher und ohne die Symmetrie zu stören dadurch, daß er jede Differentialgleichung mit einem später passend zu bestimmenden Koeffizienten multipliziert und sie dann alle zur Gleichung des P. d. v. G. addiert. So erhalten wir, wenn wir durch $X'\,Y'$, $X''\,Y''$, $X'''\,Y'''$ die nach den Achsenrichtungen genommenen Komponenten der auf unsere drei Punkte wirkenden Kräfte P', P'', P''' verstehen:

$$X'dx'+Y'dy'+X''dx''+Y''dy''+X'''dx'''+Y'''dy'''$$
$$+\lambda\,df+\mu\,dg+\nu\,dh=0,$$

worin λ, μ, ν die betreffenden unbestimmten Koeffizienten sind. Setzen wir für df, dg, dh ihre Werte ein und fassen die mit demselben Koordinatendifferential multiplizierten Glieder zusammen, so finden wir

$$dx'\left(X'-\lambda\frac{x''-x'}{f}-\nu\frac{x'''-x'}{h}\right)+dy'\left(Y'-\lambda\frac{y''-y'}{f}-\nu\frac{y'''-y'}{h}\right)+\cdots$$

(leicht durch zyklische Vertauschung zu finden) $= 0$. Jedes der sechs Dif-

ferentiale dx', dy', dx'', dy'', dx''', dy''' ist willkürlich. Wenn daher die Gleichung für beliebige Werte der Differentiale erfüllt sein soll, so müssen die Klammerausdrücke einzeln gleich Null sein. Dies gibt die sechs Gleichungen

$$\text{Ib.} \qquad X' - \lambda \frac{x'' - x'}{f} - \nu \frac{x''' - x'}{h} = 0,$$

$$\text{IIb.} \qquad Y' - \lambda \frac{y'' - y'}{f} - \nu \frac{y''' - y'}{h} = 0,$$

$$\text{IIIb.} \qquad X'' + \lambda \frac{x'' - x'}{f} - \mu \frac{x''' - x''}{g} = 0,$$

usw.

Bisher haben wir nur die allgemeinen Formeln für die Auflösung aller hier möglichen Aufgaben aufgestellt. Im vorliegenden Falle könnten nun die Kräfte

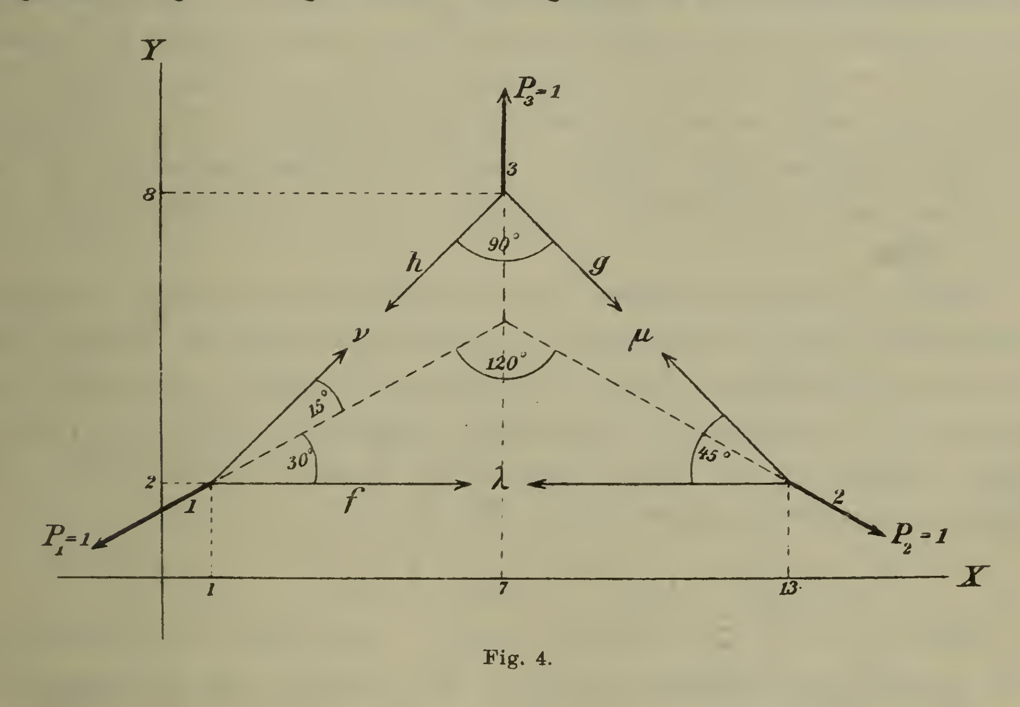


Fig. 4.

$(X', Y', \ldots)$ gegeben und die Koordinaten der Punkte für den Fall des Gleichgewichts gesucht sein, wir hätten dann neun Unbekannte, nämlich die sechs Koordinaten und die drei Größen λ, μ, ν, und auch neun Gleichungen, nämlich außer den sechs angeführten Ib—VIb noch die drei Bedingungsgleichungen I, II, III, so daß wir die neun Unbekannten ermitteln könnten, wenn die neun Gleichungen unabhängig voneinander wären. Dies ist aber nur dann der Fall, wenn die Kräfte nicht, wie hier, unabhängig von den Koordinaten sind. So aber bleibt die Lösung unbestimmt, wodurch die Tatsache ihren Ausdruck findet, daß bei konstanten Kräften etwa vorhandenes Gleichgewicht nicht gestört werden würde, wenn man das ganze Dreieck durch Parallelverschiebung in eine andere Lage brächte. — Es könnten ferner die Koordinaten gegeben und die für Gleichgewicht nötigen

Kräfte gesucht sein. Dann hätten wir wieder neun Unbekannte, nämlich die sechs Kraftkomponenten und die drei Größen λ, μ, ν, aber nur sechs Gleichungen, da die Bedingungsgleichungen die Kräfte nicht enthalten. Die Lösung wäre also wieder unbestimmt, wodurch diesmal die Tatsache ihren Ausdruck findet, daß bei den hier vorausgesetzten absolut festen Verbindungen nicht die absoluten Werte der Kräfte, sondern nur ihre Verhältnisse für das Gleichgewicht entscheidend sind. Wenn man (einen der unbestimmten Koeffizienten z. B.) λ mit der Größe[1] $\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x'}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)^2}$ multipliziert, so bedeutet das Produkt, wie LAGRANGE (Nr. 14, S. 62) zeigt, die Größe der Verbindungskraft, welche den Punkt 1 zwingt, sich nach Vorschrift unserer Bedingungsgleichung I zu bewegen. Die Wurzel hat hier, wie sich leicht zeigen läßt, den Wert 1, so daß λ und ebenso μ und ν direkt die Spannkräfte sind, welche in den Verbindungen der Punkte wirksam werden. In der Technik kommt es oft vor, daß sowohl die Lage der Punkte als auch die Kräfte bekannt sind, während man die Verbindungskräfte, die für die Bestimmung der Stärke der Konstruktion von Wichtigkeit sind, erst suchen muß.

Zahlenbeispiel.

Denken wir uns die Punkte 1, 2, 3 durch Stäbe verbunden, wie obenstehende Figur zeigt, so haben wir ein starres Dreieck, das Element des Fachwerks, und wollen nun (für die Querschnittsberechnung des Stabes) die Größe der in dem Stabe 1, 3 auftretenden Spannkraft ν unter der Voraussetzung bestimmen, daß die Koordinaten der Punkte und die Größen und Richtungen der Kräfte bekannt sind. Es sei

$$x_1 = 1,\quad y_1 = 2,\quad x_2 = 13,\quad y_2 = 2,\quad x_3 = 7,\quad y_3 = 8.$$

Die Kräfte P_1, P_2, P_3 seien sämtlich gleich 1 und mögen in den aus der Figur ersichtlichen Richtungen wirken. Wir benutzen die Gleichung IIb, welche lautet

$$Y' - \lambda \frac{y'' - y'}{f} - \nu \frac{y''' - y'}{h} = 0.$$

Das zweite Glied der linken Seite fällt fort, da $y''' - y'$, und wir erhalten

$$\nu = \frac{Y'h}{y''' - y'}.$$

Aus der Figur finden wir leicht $Y' = \frac{1}{2}$; $h = 6\sqrt{2}$; $y''' - y' = 6$. Also

$$\nu = \frac{(\frac{1}{2})(6\sqrt{2})}{6} = \frac{1}{2}\sqrt{2}.$$

---

1) Wenn man nicht λ, sondern μ oder ν nimmt, so muß natürlich der Radikand entsprechend geändert werden.

Von der Richtigkeit dieses Resultates kann man sich sehr leicht mit Hilfe eines um den Punkt 3 geführten RITTERschen Schnittes überzeugen.

Die Kombination des P. d. v. G. mit dem D'ALEMBERTschen Prinzip.

Man (WUNDT, wenn ich nicht irre) hat mit Recht gesagt, daß D'ALEMBERT das Verfahren GALILEIS umgekehrt hat: GALILEI nämlich bringt die Dynamik durch das P. d. v. G. in die Statik hinein, D'ALEMBERT die Statik durch sein Prinzip in die Dynamik, LAGRANGE aber hat das D'ALEMBERTsche Prinzip mit dem P. d. v. G. zu einem Satze kombiniert, durch den er die ganze Mechanik beherrscht. Ihm ist es möglich geworden, auch die Hydraulik in engstem Zusammenhang mit der übrigen Mechanik zu behandeln, ohne daß man sie wie früher auf ein besonderes empirisches Fundament — etwa den Satz von der gleichmäßigen Fortpflanzung des Druckes — stellen muß. Daß das P. d. v. G. auch für relatives Gleichgewicht gilt, vorausgesetzt, daß man die relativen Ergänzungskräfte mit berücksichtigt, ist selbstverständlich.

Bei Anwendung der LAGRANGEschen Kombination ist die Frage aufgetaucht, wie man zu verfahren hat, wenn die gegebenen Bedingungsgleichungen Funktionen der Zeit sind. POISSON kommt (Nr. 24, Bd. II, S. 395) durch mathematische Erwägungen zu dem Resultat, daß der Fehler verschwindend klein ist, den man macht, wenn man bei der durch das P. d. v. G. geforderten Differentiation die Zeit als Konstante behandelt, und erklärt dies deshalb für zulässig. OSTROGADSKI verwirft (in den Berichten der Petersburger Akademie vom Jahre 1842) die Ausführungen POISSONS als mathematisch fehlerhaft und betrachtet die Zeit als variabel. Er sagt: *„On ne considerera comme possibles, que les déplacements, qui combinés avec les déplacements effectif ne violent pas des équations de condition."* Er differenziert also gleichzeitig nach Ort und Zeit. Betrachten wir den Satz wie üblich in Form der Gleichung

$$\sum\left\{\left(X - m\frac{d^2x}{dt^2}\right)\delta x + \left(Y - m\frac{d^2y}{dt^2}\right)\delta y + \left(z - m\frac{d^2z}{dt^2}\right)\delta z\right\} = 0,$$

so rühren die durch d bezeichneten Differentiale von der Anwendung des P. d. v. G. her, die durch d bezeichneten von der des D'ALEMBERTschen Prinzips. Das P. d. v. G. handelt vom Gleichgewicht. Beim Gleichgewicht spielt die Zeit keine Rolle (man müßte denn extra einen neuen Begriff aufstellen, der in der Zeit dasselbe bedeutet wie das labile Gleichgewicht im Raum [etwa „augenblickliches Gleichgewicht"]). In jedem Falle können wir hier wieder an das denken, was wir bei HELMHOLTZ (S. 160 dieser Arbeit) gelernt haben, daß wir nämlich uns stets bei der virtuellen Verschiebung das konstant d e n k e n können, was nicht konstant ist, eben weil die Verschiebung nur virtuell ist. Das D'ALEMBERTsche Prinzip dagegen handelt von der Bewegung. Im Begriff der Bewegung spielt die Zeit eine

wesentliche Rolle. Deshalb müssen wir bei den durch d bezeichneten Differentiationen die Zeit als variabel ansehen, während wir sie bei den durch δ bezeichneten als konstant betrachten können. Derselben Ansicht gibt Lagrange in der ersten Ausgabe dee *Mécanique analytique* (pag. 198) Ausdruck. In der zweiten Auflage ist der betreffende Passus fortgelassen, wahrscheinlich weil Lagrange seinen Inhalt für selbstverständlich hält. Ostrogadski aber scheint anzunehmen, daß Lagrange inzwischen zu besserer Einsicht gekommen sei. Er sagt: „*Il eût trés interessant de connaître les motifs de cette suppression.*" Später erklärt er noch: „*Il est à remarquer, que d'après* Poisson *comme d'après plusieurs autres géometres le déplacement effectif actuel, est impossible.*" Darauf ist zu erwidern, daß selbstverständlich unter den am Anfang der Zeit dt herrschenden Bedingungen diejenige Bewegung unmöglich ist, die vermöge der inzwischen veränderten Bedingungen am Ende von dt wirklich erfolgt ist, daß uns aber die wirklich erfolgende Bewegung zunächst nichts angeht, da wir uns ja durch Benutzung des d'Alembertschen Prinzips Gleichgewicht geschaffen haben. Übrigens kommt Ostrogádski durch seine Methode zu genau denselben Resultaten wie Poisson und Lagrange. Sein Verfahren und das Poissons sind also beide richtig, wenn man auch die Begründungen, die sie anführen, als nicht einwandsfrei wird bezeichnen müssen. In neuerer Zeit ist die Verwendung des P. d. v. G. zur Lösung von Aufgaben der Technik (abgesehen von der sogleich noch zu besprechenden in der Fachwerkstheorie) etwas in den Hintergrund getreten, einerseits weil durch die Entwicklung der graphischen Statik bequemere Methoden als die analytischen geschaffen wurden, andererseits weil die Berücksichtigung der Reibung immer notwendiger wird. Der Vorteil, den das P. d. v. G. bietet, besteht ja oft gerade darin, daß man sich bei seiner Anwendung um die Verbindungskräfte nicht zu kümmern braucht; die Reibung aber ist von den Verbindungskräften abhängig, so daß bei ihrer Berücksichtigung der Vorteil wieder verloren geht.

Anwendung in der Fachwerkstheorie.

Durch Mohr und Maxwell ist eine Modifikation des P. d. v. G. in der Fachwerkstheorie verwendet worden. Die Änderungen der Stablängen eines Fachwerks sind bekannte Funktionen der in den Stäben wirksamen Spannkräfte, deshalb führen Beziehungen zwischen diesen Längenänderungen auf Gleichungen zwischen den Spannkräften. Solche Gleichungen braucht man, wenn es sich um ein statisch unbestimmtes Fachwerk handelt. Die rein geometrischen Beziehungen zwischen den Längenänderungen der Stäbe könnte man nun rein geometrisch ermitteln, statt dessen aber bedient man sich mit Vorteil eines Verfahrens, das ich an einem möglichst einfachen Beispiel erläutern will. Vorausgesetzt sei ein Fachwerk, das kein überzähliges Auf-

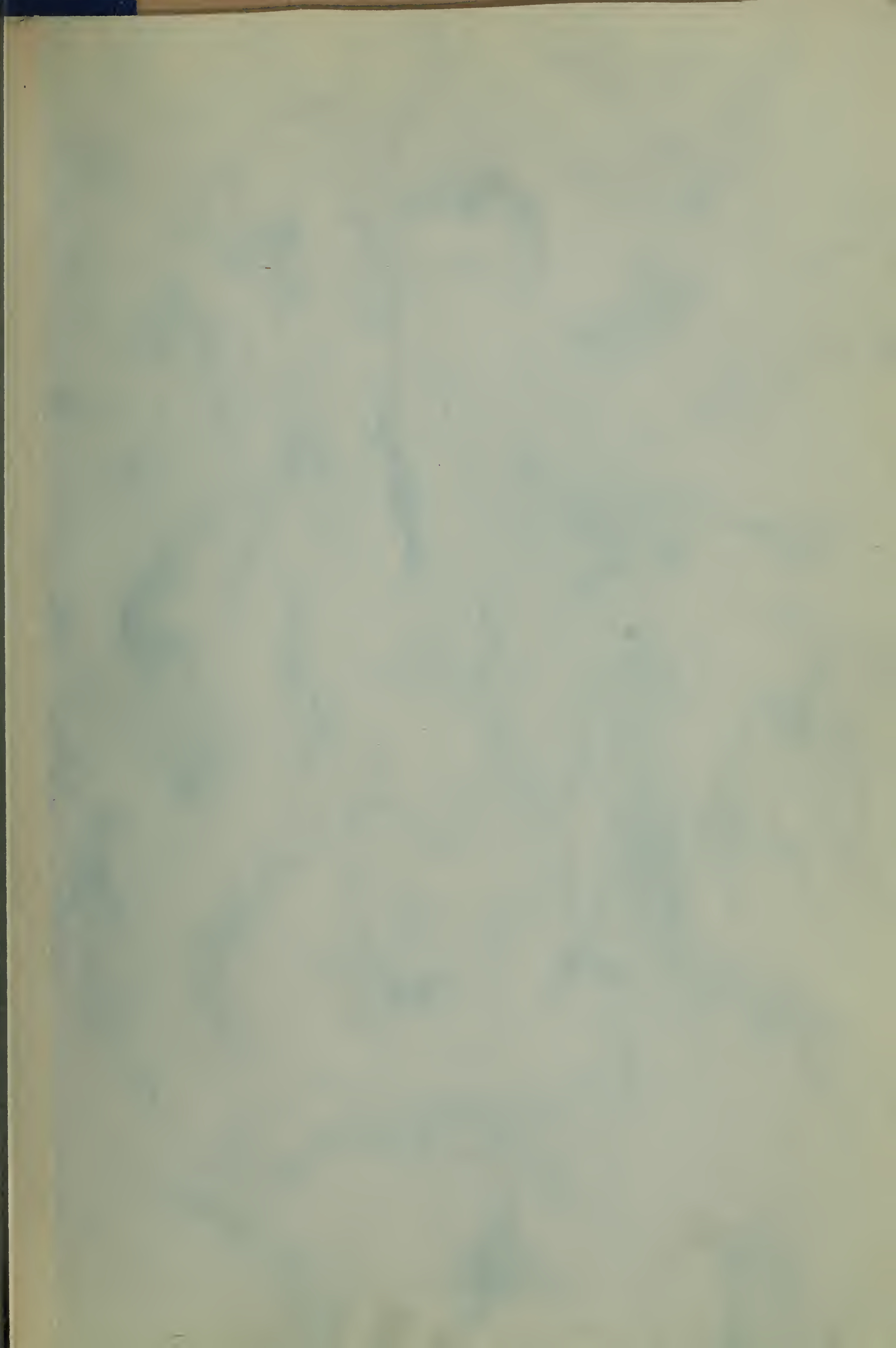
lager, wohl aber einen überzähligen Stab σ enthält. Durch Weglassung von σ machen wir das Fachwerk zum „Hauptnetz" (vgl. Müller-Breslau, Nr. 20. S. 19) d. h. statisch bestimmt und denken uns alle äußeren Kräfte fort. An Stelle von σ bringen wir an den früher durch σ verbundenen Knotenpunkten zwei entgegengesetzt gleiche Kräfte an, die beide die Größe 1 haben, Wir bestimmen nach den Regeln der Statik die Spannkraft S, die dadurch in einem Stabe s des Hauptnetzes erzeugt wird. Denken wir uns den Stab s beseitigt und an seiner Stelle zwei entgegengesetzt gleiche Kräfte S angebracht, so ist das Fachwerk im Gleichgewicht unter dem Einfluß der entstehenden Verbindungskräfte und der vier freien Kräfte, von denen zwei gleich 1 und zwei gleich S sind. Nach früher Gezeigtem ist bei einer unendlich kleinen Verschiebung die Arbeit eines der Paare gleich dem Produkt aus dem Werte einer der Kräfte und der Abstandsänderung der Angriffspunkte. Setzt man alle noch vorhandenen Verbindungen als unveränderlich voraus und nimmt eine „mögliche" Verschiebung vor, so hat man nach dem P. d. v. G.: $S\,ds - 1\,d\sigma = 0$, wo ds die unendlich kleinen Längenänderungen von s und $d\sigma$ die von σ bedeutet. Es ist also $\frac{d\sigma}{ds}$ gleich der vorhin bestimmten Spannkraft S des Hauptstabes s. Dies ist die gesuchte Beziehung zwischen den Längenänderungen. Hier dient also das P. d. v. G. dazu, geometrische Beziehungen auf mechanische zurückzuführen, während es sonst stets die umgekehrte Aufgabe zu erfüllen hat. Während wir sonst „mögliche" Verschiebungen vornehmen mußten, müssen wir hier „mögliche" Kräfte anbringen, d. h. solche, die an dem betreffenden Fachwerk im Gleichgewicht sein können. Während wir sonst wirkliche Kräfte hatten, die wir mit Hilfe virtueller d. h. nur gedachter (vgl. Einleitung) Verschiebungen zu erforschen suchen, haben wir hier wirkliche Verschiebungen, deren Beziehungen wir mit Hilfe „virtueller" Kräfte aufsuchen. Deshalb könnte man in diesem Falle wohl von einem „Prinzip der virtuellen Kräfte" sprechen.[1])

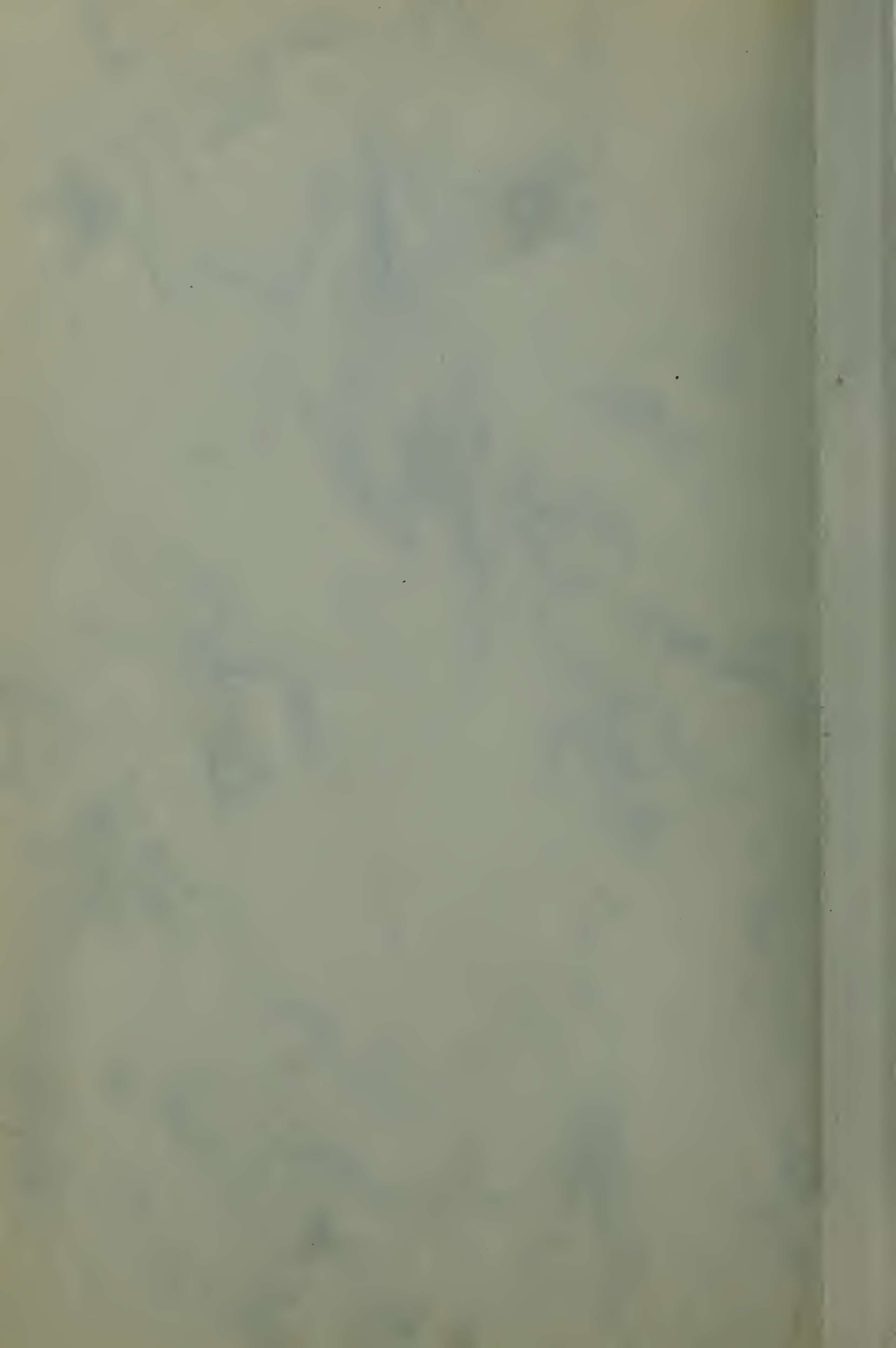
---

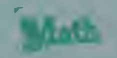
1) Nachträglich erfahre ich von Herrn Geh.-Rat Müller-Breslau, daß er derselben Ansicht gelegentlich im Kolleg Ausdruck verliehen habe.

Literatur:

1. D'Alembert, Traité de dynamique, Paris 1743.
2. Bernoulli, Brief an Varignon, siehe Nr. 35.
3. du Bois-Reymond, Emil: Über die Grenzen des Naturerkennens.
4. du Bois-Reymond, Paul: Über die Grundlagen der Erkenntnis.
5. Delaunay, Analytische Mechanik, deutsch von Krebs, Wiesbaden 1868.
6. Descartes, Oeuvres publ. par Cousin 1824.
7. Fourier: Memoire sur la statique. Im Journal de l'Ecole polytechnique Prairial an VI.
8. Galilei, Opere, Milano 1809.
9. Gauss: Aufsatz in Crelles Journal Bd. 4, S. 232.
10. Helmholtz: Vorlesungen über die Dynamik discr. Massenp. Leipzig 1898.
11. Hertz, Heinrich: Die Prinzipien der Mechanik in neuem Zusammenhange dargestellt. 1894.
12. Jacobi, Werke herausgegeben von der Akademie der Wissenschaften. Supplementband.
13. Kirchhoff: Vorlesungen über mathematische Physik. Bd. I: Mechanik.
14. Lagrange: Analytische Mechanik, deutsch von Servus 1887.
15. Lagrange: „Sur le principe des vitesses virtuelles." Im Journal de l'Ecole polyt. Prairial an VI.
16. Lagrange: J. L. Lagranges Mathem. Werke deutsch von Crelle 1823. Bd. I: Funktionen-Theorie.
17. Mach, Ernst: Die Mechanik in ihrer Entwicklung; dritte Auflage. Leipzig 1897.
18. Mohr, Aufsatz in der Zeitschrift d. Hannov. Arch.- u. Ing.-Vereins. Bd. XX, 1874, S. 509.
19. Mohr: Aufsatz im „Civiling". Jahrg. 1885, S. 251.
20. Müller-Breslau: Graphische Statik der Baukonstr. Bd. II. Leipzig 1892.
21. Neumann, C.: „Über den Satz der virtuellen Verrückungen." In den Berichten der Gesellschaft der Wissenschaft zu Leipzig. Jahrgang 1869, S. 257.
22. Newton: Isaaci Newtoni opera. Herausgegeben von Horsley, London 1779.
23. Planck: Vorlesungen über Thermodynamik 1897.
24. Poisson: Traité de Mecanique Bd. II, Paris 1833.
25. Rausenberger: Lehrbuch der analytischen Mechanik, Leipzig 1888.
26. Ritter: Analytische Mechanik, 2. Auflage, 1883.
27. Ritter: Technische Mechanik, 8. Auflage, 1900.
28. Rosenberger: Geschichte der Physik Bd. III, Braunschweig 1882.
29. Scheffler: Aufsatz in Schlömilchs Zeitschrift für Mathematik und Physik Bd. III, S. 197.
30. Streintz: Physikalische Grundlagen der Mechanik. Leipzig 1883.
31. Taeschner: Die allgemeinen Prinzipien der Statik bis zum Ende des 17. Jahrh. Breslau 1872.
32. Ubaldi, Guido: Guidi Ubaldi Mechanicorum liber. Pisauri 1577.
33. Varro: M. Varronis de Motu Tractatus. Genevae 1584.
34. Wundt: Logik. Stuttgart 1894, Band II.
35. Varignon: Nouvelles mécaniques 1725.
36. Duhamel, Lehrbuch der analyt. Mechanik. Dtsch. v. Schlömilch, Lpz. 1861.
37. Poinsot, *Théorie général de l'équilibre etc.* (Journal de l'école Polyt. 1806).
38. Föppl, Vorlagen über Technische Mechanik Bd. 1, Leipzig 1900.






Math